Ir T. Edelman.

Hydrologisch Colloquium

Voortplanting van eb en vloed in het grondwater [1)]

Enige opmerkingen naar aanleiding van een meting te Kattendijke.

Een zandlaag, dik D, zij van onderen begrensd door een ondoorlatende basis, en van boven afgedekt door een kleilaag dik D_1. De doorlatendheden zijn K en K_1, terwijl de elasticiteitsmoduli gegeven mogen zijn door E en E_1. Het profiel is op $x = 0$ begrensd (verticale wand) door open water waarin een potentiaalwisseling optreedt $\varphi_b = \varphi_0 + A_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_b}$.

De kleilaag heeft aan de bovenzijde een constante potentiaal (polderpeil) Ψ_0. Zij de potentiaal in de kleilaag Ψ en in de zandlaag φ; rekenen we voorts de onderkant van de kleilaag op z = o en de bovenkant op z = D_1 dan kunnen de volgende differentiaalvergelijkingen worden afgeleid.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \Psi}{\partial T}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{K_1}{KD}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_0 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial T}$$

waarin $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_0$ = de waarde van $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ voor z = o voorstelt.

$\varepsilon_1 = K_1 \frac{E_1}{\gamma_w}$ en $\varepsilon = K \frac{E}{\gamma_w}$ (γ_w = s.g. van water)

De randvoorwaarden zijn:

1) voor $z = D_1$ is $\Psi = \Psi_0$
2) voor z = o is $\Psi = \varphi$
3) voor x = o is $\varphi = \varphi_0 + A_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_b}$
4) voor $x = \infty$ is $\varphi = \Psi_0$

We splitsen de oplossingen in twee delen, een stationnair deel (Ψ_1 en φ_1) en een niet stationnair deel (Ψ_2 en φ_2), zodanig dat

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

De randvoorwaarden worden dan:

1) voor $z = D_1$ is $\Psi_1 = \Psi_0$ en $\Psi_2 = 0$
2) voor z = o is $\Psi_1 = \varphi_1$ en $\Psi_2 = \varphi_2$
3) voor x = o is $\varphi_1 = \varphi_0$ en $\varphi_2 = A_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{T}{T_b}$
4) voor $x = \infty$ is $\varphi_1 = \Psi_0$ en $\varphi_2 = 0$

De stationnaire oplossingen luiden:

$$\Psi_1 = \Psi_0 - (\Psi_0 - \varphi_0)\left(1 - \frac{z}{D_1}\right) e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\varphi_1 = \Psi_0 - (\Psi_0 - \varphi_0) e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

waarin $\lambda = \sqrt{\frac{KDD_1}{K_1}}$

1) Dit artikel komt in de plaats van een in Januari 1953 rondgezonden artikel van gelijke titel, dat onjuist is gebleken.

Voor het niet-stationnaire deel voldoet aan de vergelijkingen de vorm : $\psi_2 = A e^{-\beta x - bz} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{T}{T_b} - \alpha x - az + q\right)$

$$\varphi_2 = A e^{-\beta x} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{T}{T_b} - \alpha x + q\right).$$

indien de betrekkingen bestaan

$$b^2 = a^2 \qquad 2ab = \frac{n}{\varepsilon_1}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{bD_1}{\lambda^2} \qquad 2\alpha\beta = \frac{n}{\varepsilon} + \frac{aD_1}{\lambda^2} \qquad \left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{T_b} = n\right)$$

Deze oplossingen voldoen echter niet aan de randvoorwaarde 1, daar voor z = D_1 wordt: $\psi_2 = A e^{-\beta x - bD_1} \sin(nT - \alpha x - aD_1 + q)$

Uit de voorwaarden $b^2 = a^2$ en $2ab = \frac{n}{\varepsilon_1}$ blijkt, dat als a positief is, tevens b positief moet zijn. Is echter a negatief, dan moet ook b negatief zijn. Daaruit volgt dat ook de oplossing

$\psi_2 = A e^{-\beta x + bz} \sin(nT - \alpha x + bz + p)$ voldoet.

Tevens mag dus de samengestelde oplossing worden gekozen:

$$\psi_2 = A_1 e^{-\beta x - bz} \sin(nT - \alpha x - bz + q) - A_2 e^{-\beta x + bz} \sin(nT - \alpha x + bz + p)$$

waarin $b^2 = \frac{n}{2\varepsilon_1}$

Ingevolge de eerste randvoorwaarde moet ψ_2 = o worden voor z = D_1 . derhalve

$$A_1 e^{-\beta x - bD_1} \sin(nT - \alpha x - bD_1 + q) = A_2 e^{-\beta x + bD_1} \sin(nT - \alpha x + bD_1 + p)$$

waaruit volgt

$$-bD_1 + q = bD_1 + p \quad \text{en} \quad A_1 e^{-bD_1} = A_2 e^{+bD_1}$$

ofwel $q - p = 2bD_1$ en $A_2 = A_1 e^{p-q}$

Stel $2bD_1 = 2D_1\sqrt{\frac{n}{2\varepsilon_1}} = D_1\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_1 T_b}} = B$.

dan is:

$$q - p = B \quad \text{en} \quad A_2 = A_1 e^{-B}$$

Dan wordt $\psi_2 = A_1 e^{-\beta x}\left[e^{-bz} \sin(nT - \alpha x - bz + q) - e^{bz - B} \sin(nT - \alpha x + bz + p)\right]$

voor z = o wordt $\psi_2 = \varphi_2$, dus $\varphi_2 = A_1 e^{-\beta x}\left[\sin(nT - \alpha x + q) - e^{-B}\sin(nT - \alpha x + p)\right]$

ofwel $\varphi_2 = A_1 e^{-\beta x}\left[(\cos q - e^{-B}\cos p)\sin(nT - \alpha x) + (\sin q - e^{-B}\sin p)\cos(nT - \alpha x)\right]$

voor x = o moet worden: $\varphi_2 = A_0 \sin nT$ Derhalve is

$$A_1(\cos q - e^{-B}\cos p) = A_0 \quad \text{en} \quad \sin q - e^{-B}\sin p = 0$$

Derhalve wordt $\boxed{\varphi_2 = A_0 e^{-\beta x} \sin(nT - \alpha x)}$.

$$\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right)_0 = A_0 e^{-\beta x}\frac{b}{\sin B}\left[\{\sin(p+q) - 2\sin p \sin q\}\sin(nT - \alpha x) + \{\sin(p+q) + 2\sin p \sin q\}\cos(nT - \alpha x)\right]$$

waarin $B = q - p$ $\qquad e^{-B} = \frac{\sin q}{\sin p}$.

Nu is $\frac{\sin q}{\sin p} = \frac{\sin\left\{\frac{q+b}{2} + \frac{q-p}{2}\right\}}{\sin\left\{\frac{q+p}{2} - \frac{q-p}{2}\right\}} = \frac{\sin\left(\frac{q+p}{2}\right)\cos\frac{1}{2}B + \cos\frac{1}{2}(q+p)\sin\frac{1}{2}B}{\sin\left(\frac{q+p}{2}\right)\cos\frac{1}{2}B - \cos\frac{1}{2}(q+p)\sin\frac{1}{2}B} = e^{-B}$

Thans komt er echter:

$$\beta^2 - \alpha^2 + \mu\beta = \frac{1}{2}\frac{u}{\lambda^2} \qquad \text{en} \quad 2\alpha\beta + \mu\alpha - \frac{1}{2}\frac{v}{\lambda^2} = \frac{n}{\varepsilon}$$

Hieruit blijkt, dat α inderdaad groter mag zijn dan β, indien de positieve grootheid $\mu\beta$ maar groot genoeg is om het verschil van $\alpha^2 - \beta^2$ te dekken.

Een positieve μ betekent een nauwer wordend profiel daar $F = F_0 e^{-\mu x}$

Een omvorming van de formules geeft:

$$\frac{n}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\mu - v\right)$$

$$\mu = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{u}{\lambda^2}$$

Het profiel is tot de helft vernauwd als $\mu x = 0,7$; de zogenaamde halveringsafstand $a_h = \frac{0,7}{\mu}$

Te Kattendijke vond ik: α = 0,00573 en β = 0,00403.
Voorts kan D_1 op ongeveer 4 m worden gesteld.

Ik heb twee gevallen doorgerekend.

<u>Geval 1.</u> ε_1 = 40 m² per dag, dan wordt B = π en u = v = 2,9.

Dan komt er:

voor λ =	o	100	500	1000	2000	∞	m
ε =	o	96500	174000	179000	179500	180000	m² per dag
μ =	-	0,0402	0,00564	0,00456	0,00429	0,00420	-
a_h =	o	17,5	125	153	164	167	m

<u>Geval 2.</u> ε_1 = 1000 m² per dag. Dan wordt B = 0,63, u = 2,-- en v = 0,132.

Dan komt er:

voor λ =	o	100	500	1000	2000	∞	m
ε =	o	61500	167000	177000	179000	180000	m² per dag
μ =	-	0,0298	0,0052	0,0045	0,00426	0,00420	-
a_h =	o	24	135	157	164	167	m

Het blijkt dat a_h en ε niet veel meer veranderen, (ook al varieert ε_1 van 40 tot 1000) indien $\lambda \geqq 1000$ m is.

Een tamelijk moeilijk doorlatende bovenlaag geeft dus een waarde van ε in de buurt van 180 000 m² per dag, terwijl er dan een vernauwing zou zijn met een halveringslengte van ongeveer 160 m. Dit nu is bijzonder onwaarschijnlijk. Er is niets, dat zou wijzen op een dergelijke zeer sterke vernauwing van het profiel. En dan nog wel volgens een e-kromme!

Het ligt echter voor de hand, dat een zandlaag van constant profiel, doch van eindige lengte L, eveneens een opstuwende werking moet hebben in dezelfde geest als wij dat bij een toelopend profiel zagen. Een afsluiting van de zandlaag door een verticale ondoorlatende laag op afstand L achter de dijk is veel beter denkbaar dan een vernauwing volgens een e-kromme.

Het narekenen van een dergelijk geval is uiterst gecompliceerd; het wordt practisch uitvoerbaar, indien de afdekkende laag ondoorlatend mag worden aangenomen. Uit de berekening van het vernauwende profiel blijkt wel, dat deze aanname hier als benadering verantwoord kan worden geacht.

Het geval met eindige zandlaag en ondoorlatende bovenlaag heeft tot oplossing:

$$\varphi = A_1 e^{-bx} \sin(nT - bx + p) - A_2 e^{bx} \sin(nT + bx + q)$$

waarin $n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{T_6}$ en $b = \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}}$

A_1, A_2, p en q dienen uit de randvoorwaarden te worden bepaald. Deze randvoorwaarden zijn:

1e, voor $x = 0$ is $\varphi = A_0 \sin nT$
2e, voor $x = L$ is $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$

Dit geeft vier vergelijkingen:

$$A_1 \cos p - A_2 \cos q = A_0$$
$$A_1 \sin p - A_2 \sin q = 0$$
$$A_1 e^{-bL} + A_2 e^{bL} = 0$$
$$p - q = 2bL$$

Rekent men dit uit, dan blijkt te worden

de demping: $$\frac{A_x}{A_0} = \sqrt{\frac{\cosh 2b(L-x) + \cos 2b(L-x)}{\cosh 2bL + \cos 2bL}}$$

de vertraging: $$\operatorname{tg} nT_x = \frac{\sinh b(2L-x)\cdot\sin bx - \sinh bx \sin b(2L+x)}{\cosh b(2L-x)\cos bx + \cosh bx \cos b(2L+x)}$$

Ik vond te Kattendijke, dat $\frac{A_x}{A_0} = 0{,}685$ en $\operatorname{tg} nT_x = 0{,}586$, voor $x = 100$ m (afstand uiterste putten).

L en b kunnen niet rechtstreeks uit de twee vergelijkingen worden opgelost. Ik berekende voor de waarden L = 200, 300, 400, 500 en 600 m, telkens voor de waarden van $bx = 0{,}3$, $0{,}4$, $0{,}5$ en $0{,}6$ de waarden van $\frac{A_x}{A_0}$. De aldus berekende dempingskrommen worden gesneden door de lijn $\frac{A_x}{A_0} = 0{,}685$ en leveren (vier) snijpunten op. Uit deze snijpunten kan het verband worden afgelezen tussen bx en L, waarvoor de demping 0,685 wordt.

Voor enkele van deze combinaties van bx en L heb ik vervolgens de waarde van $\operatorname{tg} nT_x$ berekend. Het blijkt dat de gemeten waarde van $\operatorname{tg} nT_x = 0{,}586$ ontstaat als $bx = 0{,}42$ en L = 320 m.

Dit betekent, dat de gemeten demping en vertraging verklaard kan worden door een zandlaag, welke 320 m achter de dijk eindigt en welke een waarde $\varepsilon = 356000$ m^2 per dag vertoont, waarbij de afdekkende lagen practisch ondoorlatend moeten zijn. Het komt mij voor, dat deze uitkomst niet al te ver van de waarheid af zal liggen. Naar analogie van de uitkomsten bij vernauwend profiel mag verondersteld worden, dat de gevonden waarden van L en ε een absoluut maximum voorstellen. Het is aannemelijk dat L kleiner is dan 320 m, daar de inlage, waarin gemeten werd, ongeveer 250 m breed is. Daar λ waarschijnlijk niet oneindig is, zou dus ook ε kleiner moeten zijn en misschien tussen 200 000 en 300 000 m^2 per dag liggen. Zoals reeds opgemerkt, zijn de formules, waarbij de invloed van λ en ε_1 in rekening kunnen worden gebracht, zo gecompliceerd, dat ik nog geen gelegenheid had, dit af te leiden en uit te rekenen. Mogelijk vind ik hiervoor nog eens de tijd.

HYDROLOGISCH COLLOQUIUM.

HC(S) № 292

1 Bijlage.

's-Gravenhage, 25 April 1953.

Aan de Heren Leden en Belangstellenden van het Hydrologisch Colloquium.

Hierbij zend ik U een herziene tekst van de door Ir. T. Edelman op de a.s. vergadering te houden voordracht (punt 4 van de agenda). De vorige uitgave vervalt hiermee.

VOOR DE SECRETARIS,