

Diss. A
767

OVER DE BEREKENING VAN GRONDWATERSTROOMINGEN

DOOR

J.H. EDELMAN

OVER DE BEREKENING VAN GRONDWATERSTROOMINGEN.

Proefschrift

ter verkrijging van den graad van doctor in de Technische Wetenschap aan de Technische Hoogeschool te Delft, op gezag van den waarnemend Rector Magnificus ir. J. A. Grutterink, Hoogleraar in de Afdeeling der Mijnbouwkunde voor een Commissie uit den Senaat te verdedigen op Dinsdag 28 Januari 1947, des namiddags te 2 uur

door

JACOB HENDRIK EDELMAN,

geboren te Amsterdam.

civiel ingenieur.

Dit proefschrift is goedgekeurd door de promotoren:

prof. ir. J. Th. Thijsse

prof. dr. O. Bottema.



I N H O U D.

Inleiding.

Eerste groep vraagstukken.

De voortplanting van niveauveranderingen door phreatisch grondwater.

- par. 1 Probleemstelling, en overzicht van de vier gevallen, die behandeld worden.
- par. 2 Afleiding van de differentiaalvergelijking en algemeene oplossing.
- par. 3 Geval $n = 0$, op het kanaal is $\varphi = \varphi_0$.
- par. 4 Geval $n = 1$, op het kanaal is $q = q_0$.
- par. 5 Geval $n = 2$, op het kanaal is $\varphi = \alpha t$.
- par. 6 Geval $n = 3$, op het kanaal is $q = \beta t$.
- par. 7 Overzicht en analyse van de uitkomsten van de vier behandelde gevallen.
- par. 8 Superpositie van de elementaire gevallen.
- par. 9 Randvoorwaarde op eindigen afstand.
- par. 10 De bemaling van een put.
- par. 11 Analyse van de uitkomst.
- par. 12 Toepassing 1.
- par. 13 Toepassing 2.
- par. 14 Toepassing 3.
- par. 15 Toepassing 4.
- par. 16 Toepassing 5.
- par. 17 Veranderend doorstroomprofiel.
- par. 18 Literatuurbespreking.

Tweede groep vraagstukken.

Methode van de zeshoekjes.

Grondwater met phreatisch oppervlak.

- par. 19 Probleemstelling.
- par. 20 Afleiding van de differentiaalvergelijking.
- par. 21 De methode.
- par. 22 Put in het veld.

Grondwater onder druk.

- par. 23 Probleemstelling, afleiding van de differentiaalvergelijkingen en methode.
- par. 24 Het berekenen van een randvoorwaarde door veelvuldige superpositie.
- par. 25 Grooter wordende zeshoeken.

Strooming van zoet en zout grondwater.

- par. 26 Algemeene theorie.
- par. 27 De methode van de zeshoekjes toegepast op de strooming van zoet en zout grondwater.

Toepassingen.

- par. 28 Toepassing 1.
- par. 29 Toepassing 2.

Inleiding.

Dit proefschrift is ontstaan als studie over de duinwaterwinplaats van de Gemeentewaterleidingen van Amsterdam, een studie, die noodig was ter voorbereiding van de werken, omschreven in het "Rapport 1940" 1). In dit rapport komen hydrologische berekeningen voor, welke in par. 26 van dit proefschrift worden vermeld, en waarbij de belangrijkste uitkomsten uit wetenschappelijk oogpunt, worden besproken.

Bij verdere uitwerking van de plannen bleek o.a. behoefte te bestaan aan een methode, om den vorm van het phreatisch oppervlak te kennen in de vele terreingedeelten, waarin de duinwaterwinplaats door de duinkanalen wordt verdeeld. Gezien de zeer grillige vormen van deze terreinen, was het aangewezen met een benaderingsmethode te werken. De "methode met de zeshoekjes", in dit proefschrift behandeld als tweede groep vraagstukken, is hiermede ontstaan.

Daarnaast vroeg een ander probleem de aandacht, n.l. de bepaling van de peilvariatiën, die in een duinkanaal optreden, wanneer hieraan beurtelings hoeveelheden water worden onttrokken en toegevoegd. Het bleek al spoedig, dat de peilvariatiën bij een zeer willekeurige bedrijfsvoering met behulp van het beginsel van superpositie zijn te berekenen, wanneer men beschikt over de oplossing van één elementair geval: de peildaling in een kanaal bij constante wateronttrekking, uitgaande van een toestand van volkomen rust (in dit proefschrift behandeld als het geval waarvoor $n=1$ van de eerste groep vraagstukken). Van dit geval was door dr. M.M. Biedermann, die destijds in mathematische questies adviseerde, bij de samenstelling van het genoemde "Rapport 1940" een oplossing gegeven, waarvan de afleiding echter gedeeltelijk speculatief was geweest, en waarbij bovendien uitsluitend de verschijnselen op het kanaal zelf, en niet daarbuiten werden bepaald (zie par. 229 van het genoemde rapport).

Het geven van een verantwoorde oplossing van dit probleem is daarna eerst gezocht op de wijze van een benaderingsmethode; al zoekende is tenslotte een geheel analytische oplossing gevonden. Bij het uitwerken kwam naar voren, dat niet alleen het beschouwde geval ($n=1$) was op te lossen, maar dat een geheele serie gevallen was te berekenen, waarvan er vier zijn uitgewerkt ($n=0, 1, 2, \text{ en } 3$).

Het lag toen voor de hand na te gaan, of op soortgelijke wijze het radiale probleem zou zijn op te lossen, d.w.z. de niet-stationnaire toestrooming op een afgepompten put in phreatisch water, uitgaande van een toestand van volkomen rust. De oplossing hiervan bleek geheel analoog te zijn met de reeds afgeleide.

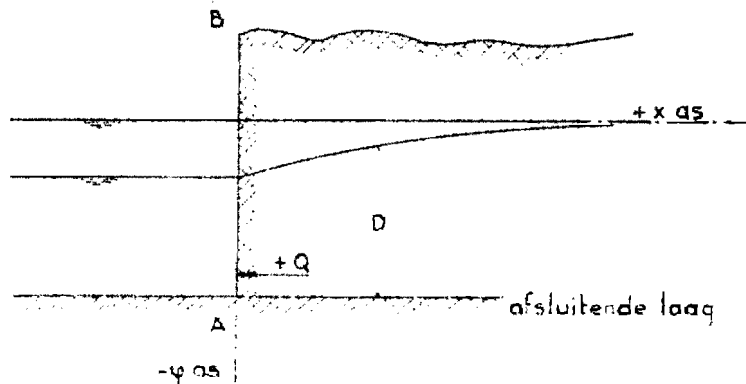
1) Rapport 1940 - De watervoorziening van Amsterdam - Stadsdrukkerij.

EERSTE GROEP VRAAGSTUKKEN.

De voortplanting van niveauveranderingen door phreatisch grondwater.

par. 1. Probleemstelling, en overzicht van de vier gevallen, die behandeld worden.

Fig. 1 stelt een laag goed doorlatend zand voor, die aan open water grenst. De begrenzing is volgens een verticaal vlak gedacht, terwijl het water zoo diep



is, dat de bodem gevormd wordt door de volkomen afsluitende laag, die ook de watervoerende laag aan de onderzijde begrenst. De geteekende figuur is een schematische voorstelling van een terrein, dat aan zee of aan een andere groote water-vlakte grenst, ofwel van den cefer van een kanaal of ri-

Fig. 1. De invloed van peilverlaging in een kanaal.

vier. In het laatste geval is maar de helft van de figuur geteekend.

In werkelijkheid zal de scheiding tusschen land en water in den regel geen verticaal vlak zijn, maar een talud, terwijl ook de bodem van het kanaal in den regel hooger ligt dan de bovenkant van de ondoorlatende laag. De complicaties, die hier het gevolg van zijn, zullen echter buiten beschouwing gelaten worden.

Er zullen vier elementaire stroomingsgevallen besproken worden, alle betrekking hebbend op niet-stationnaire grondwaterbeweging, waarbij in den beginstand alle water in rust is, zoodat het niveau van het grondwater een horizontaal vlak vormt.

1e geval. De waterstand in het kanaal (dit woord zal voortaan gebruikt worden om het open water aan te duiden) wordt plotseling verlaagd, en daarna op het nieuwe peil gehandhaafd. In formule:

$$\text{voor } x = 0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

2e geval. Het niveau van het kanaal wordt geleidelijk verlaagd, zoodanig dat de hoeveelheid water Q , die per tijdseenheid de doorsnede AB passeert, constant is, en gelijk aan Q_0 . In formule:

$$\text{voor } x = 0, \quad a = a_0.$$

3e geval. De waterstand in het kanaal wordt geleidelijk verlaagd, zoo dat de peildaling evenredig is met den tijd T . In formule:

$$\text{voor } x = 0, \quad \varphi = \alpha_1 T,$$

waarin α_1 een constante voorstelt.

4e geval. Het niveau van het kanaal wordt geleidelijk verlaagd, zoo dat de hoeveelheid water, die per tijdseenheid de doorsnede AB passeert, evenredig met den tijd toeneemt. In formule:

$$\text{voor } x = 0, \quad a = \beta_1 T,$$

waarin β_1 een constante is.

De genoemde gevallen zullen voortaan worden aangeduid als geval $n = 0$, geval $n = 1$, geval $n = 2$ en geval $n = 3$. Hierin is n een parameter, waarvan de

betekenis verderop duidelijk zal worden.

Van deze vier gevallen zullen oplossingen worden gegeven met behulp van gesloten integratie. Daarbij zal als benadering worden aangenomen, dat het profiel van den grondwaterstroom constant is, een benadering, die alleen geoorloofd is, als de peilveranderingen klein zijn ten opzichte van de waterdiepte. Deze benadering maakt aan den éénen kant de differentiaalvergelijking zoo eenvoudig, dat oplossing ervan mogelijk wordt, aan den anderen kant wordt deze vergelijking lineair in φ , waardoor superpositie mogelijk wordt. Met behulp hiervan kunnen nu in principe alle gevallen worden berekend, waarbij hetzij φ , hetzij Q aan den rand van het kanaal op willekeurige wijze met den tijd varieeren, mits uitgegaan wordt van een toestand van volkomen rust.

In fig. 2a is een willekeurig verloop van φ op het kanaal met den tijd T voorgesteld door een vloeiende lijn. Men kan deze benaderen door een trapjeskrom-

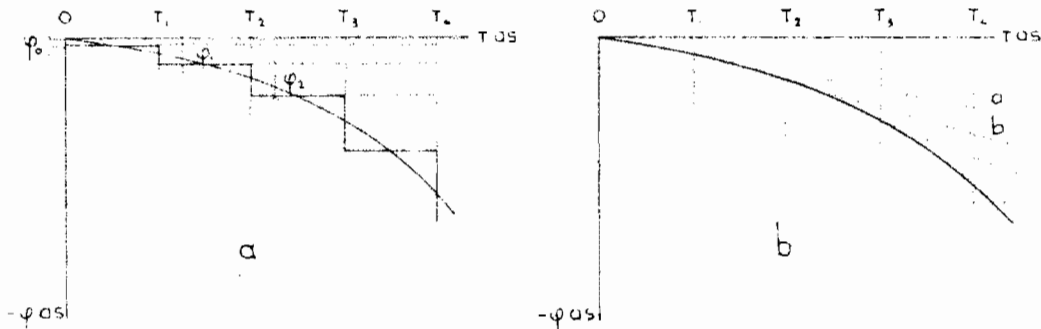


Fig. 2. Verschillende wijzen van benaderen.

me. Met de formules van het geval $n = 0$ kan men de grondwaterbeweging berekenen, veroorzaakt door de peilverlaging φ_0 ten tijde $T = 0$. Ten tijde T_1 laat men deze beweging voortgaan, maar brengt door superpositie een tweede beweging in rekening, die het gevolg is van een peilverlaging φ_1 , ten tijde T_1 . Ten tijde T_2 laat men beide bewegingen voortgaan, en superponeert een derde beweging ten gevolge van de peilverlaging φ_2 . Zoo voortgaande kan men het verdere verloop van de beweging volgen.

Zou de figuur niet φ als functie van T voorstellen, maar Q , dan kan men op dezelfde wijze werken met de formules van het geval $n = 1$.

In fig. 2b is ook φ als functie van T gegeven, maar hier is de vloeiende kromme benaderd door een veelhoek. Met de formules van het geval $n = 2$ kan men de beweging berekenen, veroorzaakt door de peildaling van lijn a . Ten tijde T_1 laat men deze beweging doorgaan, maar laat een tweede beweging beginnen, gekarakteriseerd door het verschil in richting tusschen lijn b en lijn a . De berekening verloopt geheel als de vorige. Is niet φ maar Q als functie van T gegeven, dan werkt men met de formules van het geval $n = 3$.

De toepassingsmogelijkheid van de formules kan worden uitgebreid, door ook die gevallen te beschouwen, waarbij de aanvangstoestand niet de volkomen rust is, maar een willekeurige, stationnaire toestand. Ook kan men door superpositie den invloed van regenval in rekening brengen. Op de toepassing van het superpositiebeginsel zal nader worden ingegaan in par. 8.

Door de aanname, dat de peilvariatiën klein zijn tegenover de dikte van de laag, is de toepassingsmogelijkheid van de formules beperkt. In die gevallen, waarin de peilvariatiën niet klein zijn ten opzichte van de waterdiepte, mogen de formules niet worden gebruikt. In die gevallen mag echter ook het beginsel van superpositie niet worden toegepast, zoodat men in deze gevallen veelal in het geheel niet langs analytischen weg tot een oplossing zal trachten te komen, maar over zal gaan tot het nemen van modelproeven. Men kan de berekeningen b.v. toepassen op de voortplanting in grondwater van de eb- en vloedbeweging op zee, op een benedenri-

vier of in een haven. Een belangrijker toepassingsgebied ligt in de waterleidingstechniek en de irrigatie, waar men de waterstanden in terreinen beheerscht met de peilen in open kanalen. Men is daar zoowel in de waterstanden geïnteresseerd (kanaalstanden en grondwaterstanden) als in de hoeveelheid water, die uit en in de kanalen stroomen. Een speciaal geval is het periodiek voeden en aftappen van een kanaal, een geval dat gemakkelijk tot één der vier genoemde gevallen is terug te brengen. Stel, dat de hoeveelheid water, die door AB passeert, beurtelings gedurende gelijke perioden $+a_0$ en $-a_0$ is, dan kan men de beweging berekenen, door beurtelings een beweging met $-2a_0$ en $+2a_0$ te superponeren. Voordat verdere problemen worden aangeroerd, zal echter de theorie afgeleid worden.

par. 2. Afleiding van de differentiaalvergelijking en algemeene oplossing.

De niet-stationnaire beweging van grondwater, dat op een kanaal toestroomt, wordt beheerscht door twee wetten:

1) de wet van Darcy:

(1)
$$Q = k D \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

(zie fig. 1). Hierin is

Q = de hoeveelheid water, die per tijdseenheid een doorsnede passeert. Q is een functie van x en van T . Q wordt positief gerekend van rechts naar links. Feitelijk moet de dimensie van Q , $[l^2 t^{-1}]$ zijn. Omdat de beweging echter over de lengteeenheid loodrecht op het vlak van teekoning berekend wordt, komt Q in de formules voor met de dimensie $[l^2 t^{-1}]$.

k = de doorlatenheid van het zand. Dimensie $[l t^{-1}]$.

D = het doorstrotingsprofiel, d.i. de afstand tusschen de afsluitende laag en het phreatisch oppervlak. Natuurlijk is deze grootheid niet constant, maar afhankelijk van plaats en tijd. Zoals reeds is vermeld, wordt D bij benadering constant genomen.

φ = de potentiaal - tevens de stijghoogte - van het grondwater, waarbij de waterstand in den begintoestand als nulvlak geldt.

Dimensie

T = de tijd.

2) de continuïteitswet:

(2)
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial T}$$

Deze vergelijking drukt uit, dat wanneer Q van plaats tot plaats verandert, b.v. toeneemt, het meerdere water, dat aan de streaming deelneemt, vrijkomt door een daling van den grondwaterspiegel.

In de formule stelt μ het deel van het totale grondvolume voor, dat bij daling van den grondwaterstand door lucht wordt ingenomen. Het is iets kleiner dan het poriëngehalte, in verband met het achterblijven van waterdeeltjes. Bij stijging van den grondwaterspiegel blijven luchtdeeltjes achter, zoodat men in dit geval meest met hetzelfde getal zal werken.

Om de formules te vereenvoudigen, worden de volgende substituties ingevoerd:

$$q = \frac{Q}{k D} \quad \text{en} \quad t = \frac{k D T}{\mu}$$

waardoor de vergelijkingen overgaan in

(3) $q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en (4) $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

Blijkbaar is q dimensieloos, en wordt de dimensie van t voorgesteld door $[l^2]$.

Men moet zich echter niet te veel verdiepen in de beteekenis van het "getal" q en het "oppervlak" t , maar de genoemde substituties opvatten als een kunstgreep om de constante grootheden k , D en μ uit de formules te verwijderen. Feitelijk moet nu in het vervolg gesproken worden over "het tijdstip overeenkomende met t " of "de afvoer overeenkomende met q ". Gemakshalve zal echter worden gesproken over "het tijdstip t " en "de afvoer q ".

Eliminatie van q tusschen (3) en (4) levert:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dit is de differentiaalvergelijking, die moet worden opgelost voor de randvoorwaarden:

(6) voor $t = 0$, $\varphi = 0$ (beginvoorwaarde),

(7) voor $x = \infty$, $\varphi = 0$ (op oneindig grooten afstand treedt geen peildaling op),

en verder, naar gelang het geval:

(8a) $n = 0$; voor $x = 0$, $\varphi = \varphi_0$,

(8b) $n = 1$; voor $x = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = q_0$

(volgens (3) is $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = q$),

(8c) $n = 2$; voor $x = 0$, $\varphi = \alpha t$.

De voorwaarde komt overeen met $\varphi = \frac{\alpha k \rho}{\mu} T$, in par. 1 geschreven als $\varphi = \alpha_1 T$.
De dimensie van α is $[l^{-1}]$.

(8d) $n = 3$; voor $x = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \beta t$.

Deze voorwaarde komt overeen met $\alpha = \frac{\beta (k \rho)^2 T}{\mu}$, in par. 1 geschreven als $\alpha = \beta_1 T$.
De dimensie van β is $[l^{-2}]$.

Aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden wordt voldaan door een oplossing van den volgende vorm:

$$(91) \quad \varphi = t^{\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

of, als men $\frac{x}{2\sqrt{t}} = u$ stelt,

$$(9) \quad \varphi = t^{\frac{n}{2}} f(u).$$

Hierin stelt n een parameter voor en $f(u)$ een nader te bepalen functie van u . De grootheid u is blijkbaar dimensieloos. De schrijfwijze van form (91) wordt gekozen in plaats van het meer voor de hand liggende

$$\varphi = t^n f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

eensdeels om eenvoudiger uitkomsten te verkrijgen, anderdeels om een betere overeenstemming te bereiken met de polynomen van Hermite.

Een afleiding van de formule zal niet worden gegeven. De oplossing is gevonden, door φ als functie van x te bepalen na een tijd Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, enz. en de uitkomst voor een tijd $n\Delta t$ door middel van een limietovergang te schrijven als functie van x en t . Het is ook niet noodzakelijk een afleiding te geven, want de juistheid van de formule kan worden bewezen door substitutie in de differentiaalvergelijking en vergelijking met de randvoorwaarden, zooals hieronder zal geschieden.

Door differentiatie van (9) naar x verkrijgt men

$$(101) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} f',$$

dus ook

$$(10) \quad q = \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} f'.$$

Hierin is $f' = \frac{df}{du}$. Door nogmaals differentieëren naar x :

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4} t^{\frac{n}{2}-1} f'' ,$$

waarin $f'' = \frac{d^2 f}{du^2}$. Door differentiatie naar t ontstaat

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{n}{2} t^{\frac{n}{2}-1} f - \frac{1}{2} u t^{\frac{n}{2}-1} f' .$$

Substitutie van deze differentiaalquotienten in de differentiaalvergelijking (5) levert op:

$$(13) \quad f'' - 2uf' - 2nf = 0 ,$$

waarbij blijkbaar voldaan wordt aan de noodzakelijke voorwaarde, dat x en t zich zóó laten rangschikken, dat ze tot $\frac{x}{2\sqrt{t}}$ kunnen worden samengenomen, en dat nergens een losse x of t blijft staan. Aan deze vergelijking moet $f(u)$ dus ook voldoen, wil (9) een oplossing zijn van (5).

Verg. (13) is een lineaire differentiaalvergelijking van de 2e orde, waaraan dus twee randvoorwaarden mogen worden opgelegd. Het vraagstuk heeft echter drie randvoorwaarden, en wel (6), (7) en (8). Het blijkt, dat (6) en (7) zich tot één voorwaarde laten samennemen. Zoowel voor $t=0$ als voor $x=\infty$ wordt n.l. $u=\infty$, zoodat (6) en (7) samen kunnen worden voorgesteld door:

voor $u = \infty$, $\varphi = 0$,
en aangezien $u = \infty$ alle mogelijke waarden voor t openlaat, kan $\varphi = t^{\frac{n}{2}} f(u)$ alleen nul zijn, als $f(u) = 0$ is, zoodat inplaats van (6) en (7) geschreven kan worden:

$$(14) \quad \text{voor } u = \infty, \quad f = 0 .$$

Deze randvoorwaarde is voor alle gevallen dezelfde. Voor voorwaarde (8) moeten de gevallen onderscheiden worden, waarbij steeds geldt, dat de waarde $x=0$ ook $u=0$ maakt, onafhankelijk van de waarde van t .

Geval $n=0$. Voor $u=0$ moet $\varphi = \varphi_0$ zijn, dus moet $t^{\frac{n}{2}} f = \varphi_0$ zijn. Dit is het geval, wanneer men $n=0$ neemt, en verder als voorwaarde stelt:

$$(15a) \quad \text{voor } u=0, \quad f = \varphi_0$$

Geval $n=1$. Voor $u=0$ moet $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = q_0$ zijn, dus volgens

$$(10) : \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} f' = q_0 . \text{ Dit is het geval als } n=1, \text{ en als voldaan wordt aan:}$$

$$(15b) \quad \text{voor } u=0, \quad f' = 2q_0$$

Geval $n=2$. Voor $u=0$ moet $\varphi = \alpha t$ zijn, dus moet $t^{\frac{n}{2}} f = \alpha t$ zijn. Dit is het geval, wanneer $n=2$ is, en verder aan de voorwaarden voldaan wordt:

$$(15c) \quad \text{voor } u=0, \quad f = \alpha$$

Geval $n=3$. Voor $u=0$ moet $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \beta t$ zijn, dus volgens

$$(10) : \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} f' = \beta t . \text{ Dit is het geval als } n=3, \text{ en als voldaan wordt aan:}$$

$$(15d) \quad \text{voor } u=0, \quad f' = 2\beta .$$

Resumeerende is het vraagstuk teruggebracht tot het volgende: de differentiaalvergelijking

$$(13) \quad f'' + 2uf' - 2nf = 0$$

op te lossen voor de vier gevallen, dat $n=0, 1, 2$ en 3 is, waarbij de ééne randvoorwaarde steeds is:

$$(14) \quad \text{voor } u = \infty, \quad f = 0 ,$$

en waarbij de andere randvoorwaarde van geval tot geval wisselt, en luidt:

$$(15a) \quad n=0 ; \quad \text{voor } u=0, \quad f = \varphi_0 ,$$

(15b) $n = 1$; voor $u = 0$,

(15c) $n = 2$; voor $u = 0$,

(15d) $n = 3$; voor $u = 0$,

$u = 2aq_0$
 $f = x$
 $f' = 2f$

De gevallen zullen afzonderlijk behandeld worden.

par. 3. Geval $n = 0$. Op het kanaal is $\varphi = \varphi_0$.

Voor dit geval is $\varphi = f(u)$,

en volgens verg. (10) van de vorige par. is $q = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} f'$.

De differentiaalvergelijking luidt: $f'' + 2uf' = 0$;

de randvoorwaarden:

(1) voor $u = \infty$, $f = 0$,

(2) voor $u = 0$, $f = \varphi_0$.

Voor f'' kan men schrijven $\frac{df'}{f}$. Men kan de variabelen dan scheiden, waar- door de differentiaalvergelijking overgaat in

$$\frac{df'}{f} = -2u du,$$

of na integratie:

(3) $f' = c_1 e^{-u^2}$,

en na nogmaals integreren:

(4) $f = c_1 \int e^{-u^2} du$,

waarin c_1 een integratieconstante voorstelt.

De integraal $\int e^{-u^2} du$, de z.g. foutenintegraal, is niet in elementaire functies uit te drukken. Voor de bepaalde integraal $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du = E(u)$ bestaan echter tabellen. 1)

Deze functie wordt = 1 voor $u = \infty$, en = 0 voor $u = 0$, dit laatste volgens de definitie. Voor de onbepaalde integraal kan men schrijven

$$\int e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \{E(u) + c_2\} ,$$

waarin c_2 een tweede integratieconstante voorstelt. Bij substitutie gaat (4) over in

(5) $f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} c_1 \{E(u) + c_2\}$.

Uit substitutie van de randvoorwaarde (1) volgt $c_2 = -1$ en uit substitutie van de randvoorwaarde (2) $c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varphi_0$. Voert men deze waarden in, dan vindt men

of, als inplaats van f geschreven wordt φ :

(6) $\varphi = \varphi_0 \{1 - E(u)\}$.

Verder is nu de grootheid q te berekenen uit $q = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} f'$, waarbij de waarde van f' gegeven wordt door (3). Men vindt

(7') $q = -\frac{\varphi_0}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}}$

De hoeveelheid water, die per tijdseenheid op het kanaal afvloeit, vindt men door $u = 0$ te stellen:

(7) $q = -\frac{\varphi_0}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}}$.

1) Jahnke Embde-Funktionentafeln, derde druk, 1938, blz. 24. De functie wordt hier aangeduid als $E_2(u)$.

Door integratie van deze uitkomst vindt men de totale hoeveelheid water, die van het tijdstip $t = 0$ tot het tijdstip t naar het kanaal gevloeid is:

$$\int_0^t q dt = - \frac{2\varphi_0}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}}$$

par. 4. Geval $n = 1$, aan het kanaal is $q = q_0$.

Voor dit geval is $\varphi = t^{\frac{1}{2}} f(u)$

en $q = \frac{1}{2} f'(u)$

De differentiaalvergelijking luidt:

(1) $f'' + 2uf' - 2f = 0$

en de randvoorwaarden:

(2) voor $u = \infty$, $f = 0$,

(3) voor $u = 0$, $f' = 2q_0$.

De differentiaalvergelijking is op te lossen als men er een particuliere integraal van kent. Door proberen is gevonden, dat

aan de differentiaalvergelijking voldoet. Men stelt nu

d.w.z. het product van een particuliere integraal en een nader te bepalen functie y van u . Uit differentiatie volgt:

Substitutie in (1) levert $f' = y + uy'$ en $f'' = 2y' + uy''$.
 $y'' + y'(\frac{2}{u} + 2u) = 0$

Hierin kunnen de variabelen gescheiden worden:

Na integratie verkrijgt men $\frac{dy'}{y'} = -(\frac{2}{u} + 2u) du$.

Na nogmaals integreren komt er: $y' = c_1 \frac{1}{u^2} e^{-u^2}$.

$y = -c_1 (\frac{1}{u} e^{-u^2} + 2 \int e^{-u^2} du)$.

Hierin komt dezelfde integraal voor als in het vorige geval.

Weer wordt ingevoerd

$E(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du$,

zoodat

$\int e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \{E(u) + c_2\}$,

waarin c_2 de tweede integratieconstante voorstelt. Na substitutie volgt:

$f = -c_1 [\frac{1}{u} e^{-u^2} + \sqrt{\pi} \{E(u) + c_2\}]$.

Vermenigvuldigt men beide leden met u , dan komt in het linker lid te staan uy , dat is f :

$f = -c_1 [e^{-u^2} + \sqrt{\pi} u \{E(u) + c_2\}]$.

Volgens (2) moet $f = 0$ zijn voor $u = \infty$. Dit kan alleen het geval zijn, als de vorm tussen accoladen 0 is, dus als $c_2 = -1$. Na substitutie volgt:

(4) $f = -c_1 [e^{-u^2} - \sqrt{\pi} u \{1 - E(u)\}]$.

De randvoorwaarde (3) legt een voorwaarde op aan f' . Deze grootheid moet dus eerst berekend worden door differentiatie van (4) naar u :

$$f' = \sqrt{\pi} c_1 \{1 - E(u)\}.$$

Substitutie van (3) hierin levert voor c_1 de waarde $\frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0$. De uitkomsten worden:

en aangezien $\varphi = t^{\frac{1}{2}} f$,

$$f = -q_0 \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\} \right],$$

$$\varphi = -t^{\frac{1}{2}} q_0 \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\} \right].$$

Verder, daar $q = \frac{1}{2} f'$:

$$q = q_0 \{1 - E(u)\}.$$

Aan het kanaal, waar $x=0$ is, dus $u=0$, is

$$\varphi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0 t^{\frac{1}{2}}.$$

par. 5. Geval $n=2$. Op het kanaal is $\varphi = \alpha t$.

Voor dit geval is $\varphi = t f(u)$

en $q = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} f'(u)$.

De differentiaalvergelijking luidt:

$$(1) \quad f'' + 2u f' - 4f = 0,$$

en de randvoorwaarden:

$$(2) \quad \text{voor } u = \infty, \quad f = 0,$$

$$(3) \quad \text{voor } u = 0, \quad f = \alpha.$$

De differentiaalvergelijking kan evenals in het vorige geval worden opgelost, als men er één particuliere integraal van kent.

Door probeeren is gevonden, dat de functie

aan (1) voldoet. Substitueert men nu in (1)

$$f = (2u^2 + 1) y,$$

waarin y een nader te bepalen functie van u voorstelt, dan verloopt de oplossing van y zonder moeilijkheden. Door differentiatie vindt men:

$$f' = 4u y + (2u^2 + 1) y',$$

$$f'' = 4y + 8u y' + (2u^2 + 1) y''.$$

Substitutie in (1) levert:

$$(2u^2 + 1) y'' + (10u + 4u^3) y' = 0$$

Hierin zijn de variabelen te scheiden:

$$\frac{dy'}{y'} = -\frac{10u + 4u^3}{2u^2 + 1} du.$$

Na integratie vindt men:

$$y' = c_1 \frac{e^{-u^2}}{(2u^2 + 1)},$$

waarin c_1 een integratieconstante voorstelt. Na nogmaals integreren vindt men:

$$y = \frac{1}{2} c_1 \left\{ \frac{u}{2u^2 + 1} e^{-u^2} + \int e^{-u^2} du \right\}.$$

Om C_1 te bepalen moet men van y weer overgaan op f volgens $f = (2u^2 + 1)y$ dus

Voor $\int e^{-u^2} du$ wordt geschreven $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \{E(u) + C_2\}$, waarin C_2 de tweede integratieconstante voorstelt, zoodat

$$f = \frac{1}{2} C_1 \left[u e^{-u^2} + 2(u^2 + 1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \{E(u) + C_2\} \right].$$

Nu moet, volgens (2) voor $u = \infty$, $f = 0$ zijn. Voor $u = \infty$ wordt $u e^{-u^2} = 0$ en $2u^2 + 1 = \infty$. De grootheid f kan dus alleen $= 0$ worden, als de vorm tusschen accoladen $= 0$ wordt, dus als $C_2 = -1$.

Uit de randvoorwaarde (3) kan men verder afleiden: $C_1 = -\frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}}$. Substitutie geeft:

(4) $f = -\alpha \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} - (2u^2 + 1) \{1 - E(u)\} \right]$,
 en volgens $\varphi = t f$.

$$\varphi = -t\alpha \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} + (2u^2 + 1) \{1 - E(u)\} \right].$$

Door differentiatie van (4) vindt men:

$$f' = -2\alpha \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\} \right],$$

en volgens

$$q = \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2}} f'(u)$$

is dan

$$q = -t^{\frac{3}{2}} \alpha \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\} \right].$$

Aan het kanaal, d.i. voor $u = 0$, is

$$q = -\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}.$$

Evenals bij het geval $n=0$ kan de totale hoeveelheid water, die van het tijdstip $t=0$ tot het tijdstip t in het kanaal gevloeid is, door integratie worden berekend:

$$\int_0^t q dt = \frac{4\alpha}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}.$$

par. 6. Geval $n=3$. Aan het kanaal is $q = \beta t$.

Voor dit geval is

$$\varphi = t^{\frac{3}{2}} f(u)$$

en

$$q = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} f'(u).$$

De differentiaalvergelijking luidt:

(1) $f'' + 2uf' - 6f = 0$;

en de randvoorwaarden:

(2) voor $u = \infty$, $f = 0$,

(3) voor $u = 0$, $f'' = 2\beta$.

Aan de differentiaalvergelijking wordt voldaan door de particuliere integraal

$$f = 2u^2 + 3u$$

Men kan nu dezelfde methode volgen als in de vorige gevallen. De integraties worden echter steeds ingewikkelder en daardoor lastiger te berekenen. In de volgende par. worden de uitkomsten van de diverse gevallen onder elkaar geschreven. Beziat men de tot dusver verkregen uitkomsten, dan valt hierbij een regelmaat op, zoodat men al dadelijk voor de uitkomst van het vierde geval kan schrijven:

(4) $\varphi = t^{\frac{3}{2}} A \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} (\beta u^2 + Cu + D) e^{-u^2} - (2u^2 + 3u) \{1 - E(u)\} \right].$

Hierin is $\lambda u^3 + 3u$ de particuliere integraal van de differentiaalvergelijking. Van den vorm $Bu^2 + Cu + D$ kan men alleen zeggen, dat het een tweedegraadsform zal zijn. De coëfficiënten B, C en D worden bepaald door den vorm te substitueeren in de differentiaalvergelijking, waarmee tevens de juistheid van de uitkomst bewezen wordt. Men vindt:

$$\beta = 1, \quad C = 0, \quad D = 1.$$

Verder vindt men door substitutie van (3) in (4)

$$A = -\frac{2}{3}\beta,$$

zoodat de uitkomst wordt:

$$\varphi = -\frac{2}{3}\beta t^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} (u^2 + 1) e^{-u^2} - (2u^3 + 3u) \{1 - E(u)\} \right].$$

Aan deze vergelijking voldoet bovendien randvoorwaarde (2). Aangezien $\varphi = t^{\frac{3}{2}} f(u)$ is, is nu $f(u)$ bekend, waaruit door differentiatie $f'(u)$ gevonden kan worden, en daarna $q = \frac{1}{2} t f'(u)$:

$$q = -\beta t \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} - (2u^2 + 1) \{1 - E(u)\} \right].$$

Aan het kanaal, waar $u = 0$ is, is

$$\varphi = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \beta t^{\frac{3}{2}}.$$

par. 7. Overzicht en analyse van de uitkomsten van de vier behandelde gevallen.

De volgende notaties worden ingevoerd:

$$f_0 = -\{1 - E(u)\},$$

$$f_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\},$$

$$f_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} - (2u^2 + 1) \{1 - E(u)\},$$

$$f_3 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (u^2 + 1) e^{-u^2} - \frac{2}{3} (2u^3 + 3u) \{1 - E(u)\}.$$

De uitkomsten kunnen dan geschreven worden

$$n=0; \quad \varphi = \varphi_0 \{1 - E(u)\} = -\varphi_0 f_0$$

$$n=1; \quad \varphi = -\varphi_0 t^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\} \right] = -\varphi_0 t^{\frac{1}{2}} f_1$$

$$n=2; \quad \varphi = -\alpha t \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} - (2u^2 + 1) \{1 - E(u)\} \right] = -\alpha t f_2$$

$$n=3; \quad \varphi = -\frac{2}{3}\beta t^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} (u^2 + 1) e^{-u^2} - (2u^3 + 3u) \{1 - E(u)\} \right] = -\beta t^{\frac{3}{2}} f_3$$

$$n=0; \quad q = -\frac{\varphi_0}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} = -\varphi_0 t^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$n=1; \quad q = \varphi_0 \{1 - E(u)\} = -\varphi_0 f_0$$

$$n=2; \quad q = -\alpha t^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - 2u \{1 - E(u)\} \right] = -\alpha t^{\frac{1}{2}} f_1$$

$$n=3; \quad q = -\beta t \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} - (2u^2 + 1) \{1 - E(u)\} \right] = -\beta t f_2.$$

Aan het kanaal is

$$n=0 ; \varphi = \varphi_0,$$

$$n=1 ; \varphi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0 t^{\frac{1}{2}}$$

$$n=2 ; \varphi = \alpha t$$

$$n=3 ; \varphi = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \beta t^{\frac{3}{2}}$$

$$q = -\frac{\varphi_0}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}},$$

$$q = q_0,$$

$$q = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha t^{\frac{1}{2}},$$

$$q = \beta t.$$

Er wordt aan herinnerd, dat $q = \frac{Q}{kD}$ en $t = \frac{kD}{\mu} T$.

Achterin het werk bevinden zich tabellen voor $\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}$, f_0 , f_1 , f_2 en f_3 .

De functies f_0 tot en met f_3 bezitten de eigenschap, dat f_2 kan worden gevonden, door f_3 te differentieëren naar $2u$, d.i. naar $\frac{x}{\sqrt{t}}$, dat f_1 op dezelfde wijze uit f_2 kan worden verkregen en zoo vervolgens. Men kan in het algemeen bewijzen, dat wanneer $F(u)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$(1) \quad f'' + 2uf' - 2nf = 0,$$

de afgeleide van $F(u)$ naar u een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$(2) \quad f'' + 2uf' - 2(n-1)f = 0.$$

Substitutie van $F(u)$ in (1) levert n.l. op:

$$F'' + 2uF' - 2nF = 0.$$

Differentieert men naar u , dan vindt men

$$F''' + 2uF'' - 2(n-1)F' = 0,$$

waarmee uitgedrukt wordt, dat F' een oplossing van (2) is. Wegens het homogene karakter van de differentiaalvergelijking is dan ook ieder veelvoud van F' een oplossing van (2).

De differentiaalvergelijking (1) en (2) kunnen opgevat worden als de differentiaalvergelijking van twee opeenvolgende der behandelde gevallen.

Door het bovenstaande is een verband gelegd tusschen de uitdrukking voor φ in de vier behandelde gevallen. Welk veelvoud van F' gekozen moet worden, hangt niet af van de differentiaalvergelijking, maar van de randvoorwaarde. Dat dezelfde functies f_0 t.e.m. f_3 voorkomen in de uitdrukkingen voor q , volgt uit de algemeene vergelijking voor q (verg. (10) van par. 2):

$$q = \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-1} f'.$$

Men kan de vraag stellen, welke regelmaat in de functies f_0 , f_1 , f_2 en f_3 zit, en daarmee tevens het probleem stellen, hoe de bedoelde functie wordt voor grootere waarden van n dan 3. Men kan de functies alle schrijven inden vorm

$$(3) \quad f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p e^{-u^2} - q \{1 - E(u)\},$$

waarin p en q beide functies van u voorstellen. De functie f moet een oplossing zijn van de differentiaalvergelijking

$$(4) \quad f'' + 2uf' - 2nf = 0$$

Bij substitutie vindt men:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} (p'' - 2p - 2up' + 2q' - 2np) e^{-u^2} - (q'' + 2uq' - 2nq) \{1 - E(u)\} = 0.$$

Aangezien verwacht mag worden, dat p en q polynomen zijn, volgen hieruit de

voorwaarden, waaraan p en q moeten voldoen;

$$(5) \quad p'' - 2p - 2np' + 2q' - 2mp = 0$$

en

$$(6) \quad q'' + 2uq' - 2mq = 0.$$

Verg. (6) drukt uit, dat q een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking (4) moet zijn, wat bij de afgeleide gevallen ook steeds het geval was.

Verder is hiervoor afgeleid, dat de functies f met opvolgende waarden van n uit elkaar kunnen worden afgeleid door differentiatie naar $2u$. Differentiatie van (3) naar $2u$ levert op:

$$(7) \quad \frac{f'_2}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{p' - 2mp + q'}{2} e^{-u^2} - \frac{q'}{2} \{1 - E(u)\},$$

welke functie moet overeenkomen met

$$(8) \quad f_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p_0 e^{-u^2} - q_0 \{1 - E(u)\}.$$

(met index 0 zijn de functies aangegeven, waarvoor de eenheid lager is dan voor de beschouwde functie). Uit (7) en (8) volgt:

$$(9) \quad p' - 2mp + q = 2p_0 \quad \text{en}$$

$$(10) \quad q' = 2q_0.$$

Door (9) te differentieëren en van (5) af te trekken verkrijgt men:

$$(11) \quad p = \frac{p_0' + \frac{1}{2} q_0'}{n}.$$

Volgens (10) is $q' = 2q_0$, dus

$$(11') \quad p = \frac{p_0' + q_0}{n}.$$

Hiermee is p dus te berekenen, wanneer p_0 en q_0 bekend zijn, terwijl q volgens (10) te berekenen is door integratie van $2q_0$.

Is dus f_0 voor zekere waarde van n bekend, dan kan f voor een waarde n van , die één grooter is, berekend worden. Als eenige moeilijkheid blijft nog over de integratieconstante vast te stellen bij het berekenen van q uit q_0 . Om deze te bepalen bedenke men, dat q_0 volgens (6) een oplossing van de differentiaalvergelijking (4) moet zijn. De functie q_0 is een polynoom van den vorm

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

Substitutie in (4) levert o.a. als voorwaarde op:

$$A = \frac{C}{n},$$

waaruit A is te bepalen.

In fig. 3 zijn de verkregen uitkomsten grafisch voorgesteld. Aan de linkerszijde is een afbeelding gegeven van den grondwaterspiegel op verschillende tijdstippen, die telkens een gelijk bedrag verschillen (met uitzondering van geval $n=0$, waarbij de tijden zich verhouden als 1:4:16). Rechts is een grafiek gegeven van het verloop van ψ of q aan het kanaal ($x=0$) met den tijd. In die gevallen, waarin de randvoorwaarde ψ bepaalde, is het verloop van q gegeven en omgekeerd.

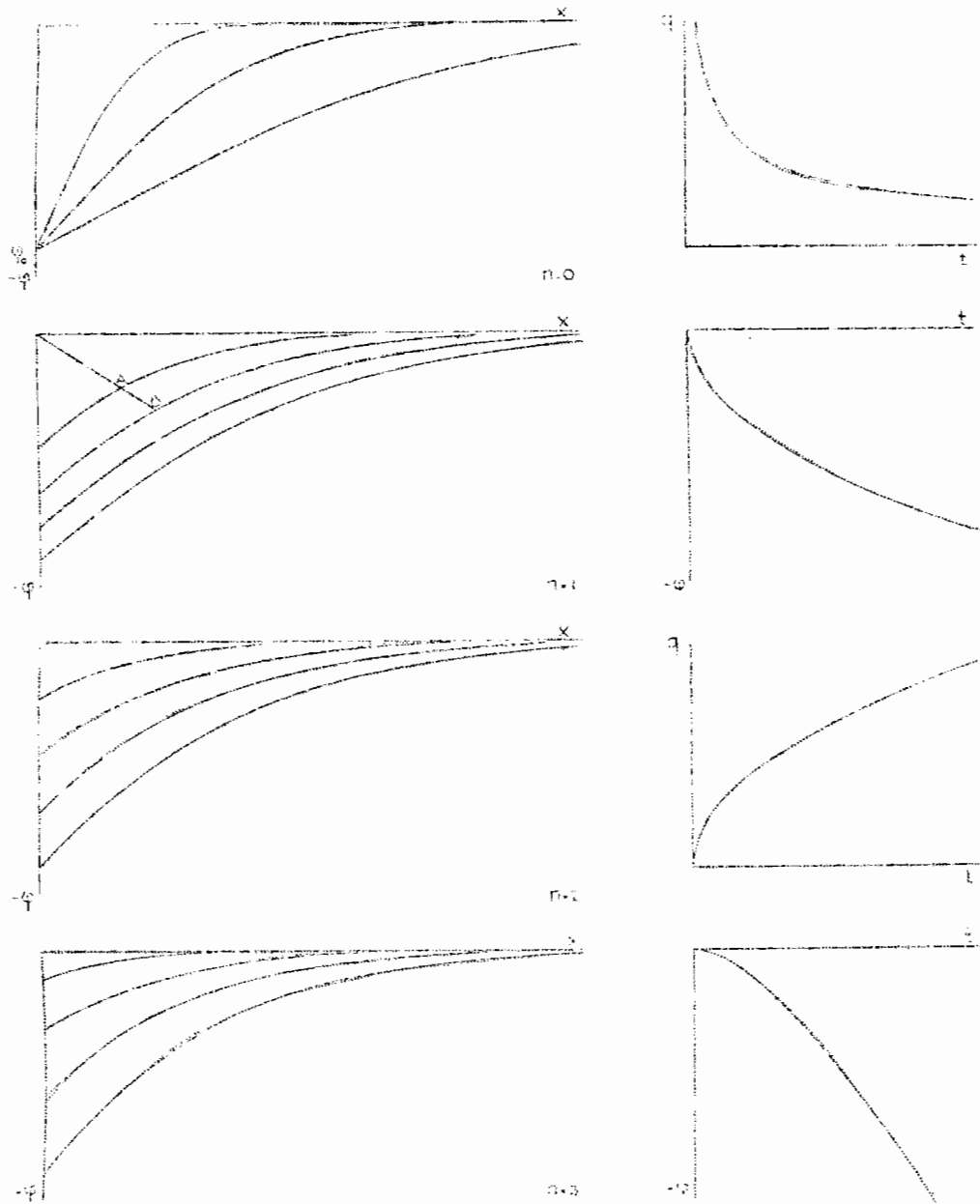


Fig. 3. Uitkomst van de vier gevallen van toestrooming op een kanaal.

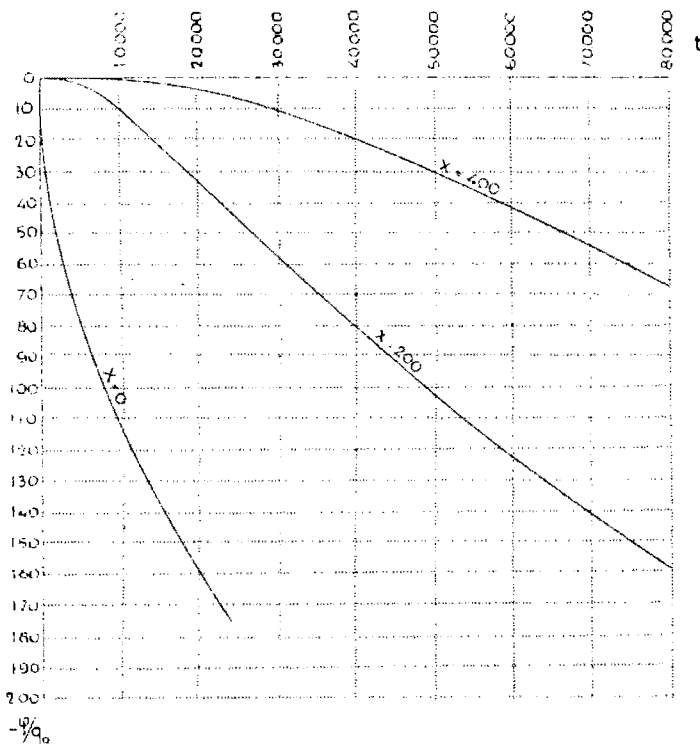
In het eerste en tweede geval bevat de randvoorwaarde aan het kanaal gecombineerd met de beginvoorwaarde een discontinuïteit. In het eerste geval wordt het peil van het kanaal in het eerste oogenblik plotseling van 0 op h_0 gebracht. Als gevolg hiervan verandert q aan het kanaal plotseling van 0 tot ∞ , zooals uit de formules blijkt. In het tweede geval is het verloop van φ wel continu, maar verandert q aan het kanaal in het eerste oogenblik plotseling van 0 tot q_0 .

Deze discontinuïteiten moeten in de uitkomst tot uitdrukking komen. Wanneer men in de betreffende formules $x=0$, $t=0$ substitueert, moet men twee verschillende uitkomsten voor φ of q vinden. Dit is ook het geval, doordat de grootheid u voor $x=0$, $t=0$ ofwel $=0$, ofwel $=\infty$ is. Bij substitutie vindt men $u = \frac{x}{2t} = \frac{0}{0}$, d.i. een onbepaalde uitkomst. Stelt men echter $x=0$, en laat

men t tot nul naderen, dan vindt men $u = 0$; stelt men daarentegen $t = 0$, onlaat men x tot nul naderen, dan vindt men $u = \infty$. Substitueert men $u = 0$ in de vergelijkingen voor ψ of q , dan vindt men die waarde, die bij de randvoorwaarde $x = 0$ hoort; substitueert men $u = \infty$ dan vindt men de waarde, die bij de beginvoorwaarde hoort ($t = 0$).

Mathematisch is hiermee de discontinuïteit verantwoord. Men zal echter graag de analyse van de uitkomst iets verder voortzetten om een goed begrip te verkrijgen. Hiertoe is in fig. 4 de grootheid ψ als functie van t uitgezet voor het geval $n = 1$ (aan het kanaal is $q = q_0$), en wel voor drie waarden van x , n.l. $x = 0$, $x = 200$ en $x = 400$ m.

Trekt men in een willekeurig punt van één van deze krommen de raaklijn, dan is de helling hiervan een maat voor de grootheid $\frac{d\psi}{dt}$ in het beschouwde punt. Volgens de beginvoorwaarde is voor $t = 0$, voor alle waarden van x , $\psi = 0$. Hieruit volgt, dat $\frac{d\psi}{dt} = 0$ is, en volgens de differentiaalvergelijking $\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\psi}{dx}$, is ook $\frac{d\psi}{dx} = 0$. Alle krommen moeten dus aan de t as raken. Ze doen dit ook, behalve de lijn voor



$x = 0$, die er loodrecht op staat. Aan het kanaal is n.l. $\psi = -\frac{2}{\sqrt{g}} q_0 t^{3/2}$; dus $\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2} q_0 t^{1/2}$, wat voor $t = 0$ de waarde ∞ oplevert. De lijnen voor $x = 400$ en $x = 200$ hebben beide een naar links omgebogen kopje. Bij kleiner wordende waarden van x wordt dit steeds kleiner, totdat het bij $x = 0$ juist verdwenen is. De kromme lijn gaat dus bij kleiner wordende x geleidelijk over in die voor $x = 0$, waarbij de raaklijn in het punt $t = 0$ steeds horizontaal is, en alleen in het laatste geval verticaal.

Fig. 4. De daling van den waterstand als functie van den tijd op drie verschillende plaatsen.

Een verder punt van onderzoek kunnen de vier linksche grafieken van fig. 3 uitmaken. Als voorbeeld kan het geval genomen worden, waarbij $n = 1$ is. Men kiese op één van de geteekende krommen een punt A, overeenkomende met $x = x_0$, $t = t_0$. $\psi = \psi_0$, en men vergelijke dit met punt B, waarvoor $t = n t_0$ zoo groot is ($t = n t_0$), en waarvoor ψ dezelfde waarde heeft. Voor dit punt is dus volgens $u = \frac{x}{\sqrt{g} t}$ de grootheid u , $\sqrt{g} x$ zoo groot, terwijl volgens $\psi = t^{3/2} f(u)$ de grootheid ψ ook $\sqrt{g} x$ zoo groot is. Het punt B ligt dan op de rechte lijn OA, en $OB = \sqrt{n} \times OA$. Men mag dit als volgt formuleeren: is de kromme geteekend voor $t = t_0$, en wil men de kromme teekenen voor $t = n t_0$, dan vindt men die, door de eerste kromme vanden oorsprong uit met een factor \sqrt{n} te vermenigvuldigen. Verder hebben deze krommen dan de meetkundige eigenschap, dat de oppervlakten tusschen de ψ as, de x as en de krommen zich verhouden als n^2 . Deze oppervlakte is een maat voor de hoeveelheid water, die sinds het begintijdstip naar het kanaal gevloed is. Bij een constante waarde van Q aan het kanaal moet deze na een n x zoo grooten tijd ook

ψ \times zoo groot zijn.

Soortgelijke verwantschappen kan men afliden voor de andere gevallen, waarbij men ook steeds het verband tusschen de oppervlakte van de figuur en de totaal weggevoelde hoeveelheid water kan verifiëren. De uitkomsten zijn hier echter minder sprekend. Alleen voor het eerste geval kan vermeld worden, dat de kromme voor $t = nt_0$ uit de kromme voor $t = t_0$ afgeleid kan worden, door alle abscissen met \sqrt{n} te vermenigvuldigen, m.a.w. door de kromme vanuit de ψ as met een factor \sqrt{n} orthogonaal affien te transformeeren.

par. 8. Superpositie van de elementaire gevallen.

Zooals in par. 1 al werd opgemerkt, kunnen de vier elementaire gevallen dienen om meer gecompliceerde toestanden te berekenen, waarbij gebruik wordt gemaakt van het beginsel van superpositie. Om inzicht te krijgen in de wijze, waarop dit gebeurt, en tevens verantwoording van de juistheid af te leggen, zal een bepaald geval besproken worden. Men zal echter inzien, dat het bewijs meer in het algemeen geldt.

Neemt men aan, dat, uitgaande van den rusttoestand, gedurende een tijd een constante hoeveelheid water door het kanaal wordt onttrokken, dan wordt de beweging in dat tijdvak volledig omschreven door onderstaande differentiaalvergelijking met randvoorwaarden:

$$I \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } t = 0, \quad \psi_1 = 0 \\ \text{voor } x = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = q_1 \\ \text{voor } x = \infty, \quad \psi_1 = 0 \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$$

Bij integratie van de vergelijking komt men tot de hiervoor besproken uitkomst, die hier voor het tijdstip t_0 korthedshalve zal worden aangeduid met:

$$(I) \text{ voor } t = t_0, \quad \psi_1 = f(x)$$

Gevraagd wordt de beweging te berekenen, die ontstaat, als ten tijde $t = t_0$ de wateronttrekking door het kanaal van q_1 wordt veranderd in q_2 . De waterbeweging die dan ontstaat, wordt geheel vastgelegd door de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarden:

$$III \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } t = t_0, \quad \psi_3 = f(t) \\ \text{voor } x = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = q_2 \\ \text{voor } x = \infty, \quad \psi_3 = 0 \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_3}{\partial t}$$

Deze grondwaterbeweging is te berekenen, door op de eerstgenoemde een tweede beweging te superponeeren, gekenmerkt door een potentiaal ψ_2 , welke beweging wordt vastgelegd door de volgende vergelijking met randvoorwaarden:

$$II \left\{ \begin{array}{l} \text{voor } t = t_0, \quad \psi_2 = 0 \\ \text{voor } x = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = q_2 \quad (q_2 = q_2 - q_1) \\ \text{voor } x = \infty, \quad \psi_2 = 0 \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial t}$$

Het bewijs wordt geleverd door de overeenkomstige vergelijkingen van I en II bij elkaar op te tellen, waardoor het stelsel III ontstaat.

De gevallen I en II zijn te berekenen met de hiervoor afgeleide formules. Daardoor is ook geval III te berekenen.

Dat dit superponeeren bij de genoemde lineaire differentiaalvergelijking geoorloofd is, is zonder meer duidelijk; speciale aandacht moet echter worden gevraagd voor het consequent volhouden van de superpositie in de randvoorwaarden.

De superposities die worden toegepast in par. 9 bij de z.g. spiegelmethode kunnen verder onbesproken blijven, aangezien het bewijs op dezelfde wijze ver-

loopt, als hierboven is aangegeven.

Wel verdient nog vermelding het geval, dat men nuttigen neerslag in rekening brengt. Hieronder wordt verstaan dat deel van den neerslag, dat in de grond dringt, en den grondwaterstroom voedt. Meestal wordt een gelijkmatige voeding van N m/dag in rekening gebracht. Om in overeenstemming te blijven met de verder gebruikte notaties, wordt $\frac{N}{kD}$ voorgesteld door n , waarvan de dimensie is $[L^{-1}]$.

De differentiaalvergelijking wordt in dit geval

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - n.$$

Superponeert men hierop een tweede beweging (en eventueel een derde en een vierde) zonder nuttigen neerslag, waarvoor geldt:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

dan ontstaat door optelling, waarbij $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2$,

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - n,$$

dat is weer de differentiaalvergelijking van een strooming met nuttigen neerslag. Hiervan zal gebruik worden gemaakt in par. 15 (Toepassing 4).

par. 9. Randvoorwaarde.. op eindige afstand.

Tot dusverre is steeds verondersteld, dat het grondwater zich tot in het oneindige voortzet. Men kan echter ook het geval veronderstellen, dat zich op een afstand L van het eerste kanaal een tweede kanaal bevindt, dat evenwijdig loopt aan het eerste, en waarin de waterspiegel op een constant niveau gehouden wordt. Bij de hiernavolgende beschouwing zal worden aangenomen, dat ψ in het tweede kanaal $= 0$ is. Mocht het tweede kanaal echter een anderen waterstand hebben, dan verandert de waterbeweging alleen in zoverre, dat op de berekende beweging een tweede, stationnaire, gesuperponeerd moet worden, die overeenkomt met een lineair verhang tusschen de kanalen.

In fig. 5 stelt A het eerste kanaal, K het tweede voor; de onderlinge afstand is L . In het kanaal A wordt de waterstand verlaagd op één van de wijzen, die in de behandelde vier gevallen waren verondersteld. De lijn a stelt den grondwaterspiegel voor op een tijdstip t in de veronderstelling, dat het tweede kanaal niet aanwezig zou zijn. De lijn a is dus te berekenen met de afgeleide formules.

Om nu te zorgen, dat in K voldaan wordt aan de voorwaarde, dat $\psi = 0$ blijft, moet men een tweede waterbeweging superponeeren, door te veronderstellen, dat zich in B, op afstand L rechts van K, ook een kanaal bevindt, en dat hierin

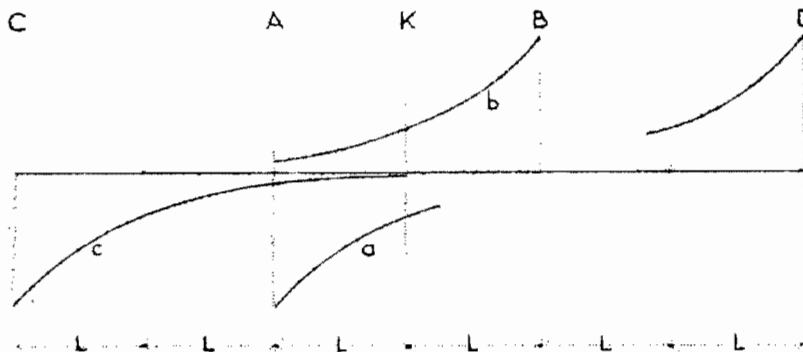


Fig. 5. Het "spiegelen" van stroombeelden.

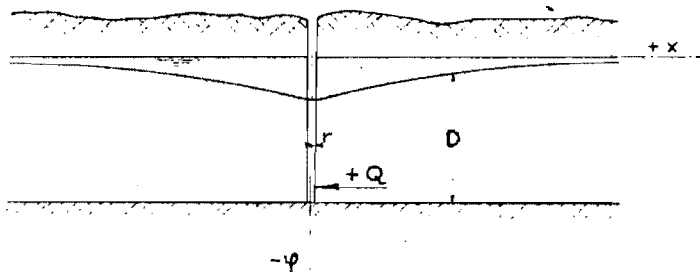
de waterstand op dezelfde wijze wordt verhoogd als hij in A wordt verlaagd. Ten tijde t veroorzaakt de peilverandering in B een grondwaterspiegel ψ , die in K, om redenen van symmetrie, een even groote stijging van den waterspiegel te zien geeft als ψ een daling, zoodat voldaan wordt aan de voorwaarde, dat in K, $\psi = 0$ blijft. Nu wordt echter in A de aanvankelijk veronderstelde waterbeweging weer verstoord door den invloed van ψ . Om dezen invloed te compenseeren kan men een kanaal bij C veronderstellen, op afstand L links van A gelegen, waarin een spie-

geldaling plaats heeft gelijk aan die in A. Ten tijde t veroorzaakt die den grondwaterspiegel ζ . De invloed van ζ verstoort weer de randvoorwaarde in K, waardoor weer een kanaal bij D, op afstand $3L$ rechts van K, moet worden verondersteld met waterstijging. Men kan zoo tot in het oneindige voortgaan met het veronderstellen van kanalen met waterdaling op afstanden $2L, 4L, 6L$ enz. links van A en kanalen met waterstijging op afstanden $2L, 4L, 6L$ enz. rechts van A. De invloed op het gedeelte A K zal echter met toenemenden afstand steeds minder worden en tot nul naderen, zoodat men de potentiaal in een willekeurig punt tusschen A en K op een tijdstip t kan vinden als de som van een oneindig voortlopende reeks, waarvan de termen beurtelings + en - zijn en tot nul naderen. Op physische gronden mag men aannemen, dat deze reeks convergeert.

par. 10. De bemaling van een put.

Tot dusverre is gesproken over de niet-stationnaire waterbeweging, die ontstaat als in een lang, recht kanaal de waterstand veranderd wordt. De waterbeweging was hier steeds evenwijdig aan het vlak van teekening. Men kan hetzelfde probleem stellen voor het geval de streaming radiaal is. De technische uitvoering van dit theoretische geval is een put, die afgepompt wordt.

In fig. 6 wordt een verticale doorsnede over een put met straal r gegeven.



De situatie is gelijk aan die van vorige gevallen: een waterdoorlatende laag, waarin het water een vrij, phreatisch oppervlak kan vormen, wordt aan de onderzijde begrensd door een volkomen ondoorlatende laag. Men begint den put op het tijdstip $T = 0$ op één of andere wijze af te pompen, uitgaande van de rusttoestand (horizontaal phreatisch opper-

Fig. 6. De invloed van het bemalen van een put.

vlak, $\varphi = 0$).

Eerst zal de differentiaalvergelijking voor dit stroomingsgeval worden afgeleid. De wet van Darcy luidt:

(1) $Q = kD \cdot 2\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

en de continuïteitsvergelijking:

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \cdot 2\pi r \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

De notaties zijn dezelfde als in het vorige vraagstuk (zie par. 2 en fig. 6). Stelt men

$$q = \frac{Q}{2\pi k r D} \quad \text{en} \quad t = \frac{kD}{\mu} T,$$

dan gaan de vergelijkingen over in

(3) $q = r \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en (4) $\frac{\partial q}{\partial x} = r \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

De groothed q stelt hier dus iets anders voor dan bij de vorige vraagstukken. De dimensie is $[L]$. Evenals bij het vorige vraagstuk kan D constant verondersteld worden. De variaties van φ moeten dus klein zijn tegenover D.

Eliminatie van q uit (3) en (4) levert

(5) $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

Ook hier zijn twee randvoorwaarden steeds dezelfde, en wel:

(6) voor $t = 0$, $\varphi = 0$ (beginvoorwaarde),

(7) voor $x = \infty$, $\varphi = 0$.

Er is nog een derde randvoorwaarde, die aangeeft op welke wijde de put afgepompt wordt. Hier zal één geval worden behandeld, waarbij de put met constante capaciteit Q_0 bemalen wordt. De randvoorwaarde hiervoor luidt:

(8) voor $x = r$, $x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = q_0$ (zie verg. (3).)

Het probleem is nu, de differentiaalvergelijking (5) op te lossen voor de randvoorwaarden (6), (7) en (8).

Het blijkt, dat evenals bij de vorige groep vraagstukken de oplossing van den vorm is

(9) $\varphi = t^{\frac{n}{2}} f(u)$,

waarin $u = \frac{x}{2\sqrt{t}}$. Evenals vroeger is n een parameter en $f(u)$ een nader te bepalen functie van u .

Door differentiatie verkrijgt men:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} f' \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4} t^{\frac{n}{2}-1} f''$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{n}{2} t^{\frac{n}{2}-1} f - \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-1} u f'$$

Bij substitutie in (5) vindt men:

(10) $f'' + (\frac{1}{u} + 2nu) f' - 2nf = 0$

en bij substitutie in (3):

(11) $q = t^{\frac{n}{2}} u f'$

Verg. (10) is dus de differentiaalvergelijking, waaraan f moet voldoen, wil (9) een oplossing van (5) zijn. Wat de randvoorwaarden betreft, zowel voor $x = \infty$ als voor $t = 0$ wordt $u = \infty$, zoodat de randvoorwaarden (6) en (7) beide overgaan in

voor $u = \infty$, $t^{\frac{n}{2}} f = 0$.

Aangezien $t^{\frac{n}{2}}$ niet steeds nul kan zijn, is

(12) voor $u = \infty$, $f = 0$

De tweede randvoorwaarde hangt van het geval af, dat beschouwd wordt. Hier zal alleen het geval behandeld worden, dat

voor $x = r$, $q = q_0$.

Gemakshalve zal deze voorwaarde veranderd worden in:

voor $x = 0$, $q = q_0$.

Naderhand (wanneer de uitkomst gevonden is), zal dan moeten worden geverifieerd, dat voor kleine waarden van x de grootheid q weinig verandert. Dit is te verwachten, omdat bij daling van het phreatisch oppervlak uit een cylinder met kleinen straal slechts weinig water vrijkomt. Volgens (11) is $q = t^{\frac{n}{2}} u f'$, zoodat de randvoorwaarde komt te luiden:

voor $x = 0$, $t^{\frac{n}{2}} u f' = q_0$.

Hieraan wordt voldaan als $n = 0$ en als verder

(13) voor $x = 0$ (dus $u = 0$), $u f' = q_0$.

Voert men de waarde $n = 0$ verder in in de vergelijking (10), dan wordt het pro-

bleem, de differentiaalvergelijking

$$(14) \quad f'' + \left(\frac{1}{u} + 2u\right) f' = 0$$

op te lossen voor de randvoorwaarden

$$(12) \quad \text{voor } u = \infty, \quad f = 0,$$

$$(13) \quad \text{voor } u = 0, \quad u f' = q_0.$$

Hiermee is dan φ bekend, want voor $v = 0$ is $\varphi = f(u)$.

In verg. (14) zijn de variabelen te scheiden:

$$\frac{df'}{f'} = -\left(\frac{1}{u} + 2u\right) du,$$

waaruit na integratie volgt:

$$(14^1) \quad f' = \frac{C_1}{u} e^{-u^2},$$

waarin C_1 een integratieconstante voorstelt. Volgens (13) is voor $u = 0$, $u f' = q_0$, wat bij substitutie oplevert $C_1 = q_0$, waardoor (14¹) overgaat in

$$(15) \quad f' = \frac{q_0}{u} e^{-u^2}.$$

Terloops zij opgemerkt, dat door deze vergelijking de grootheid $q (= u f')$ bepaald wordt:

$$(16) \quad q = q_0 e^{-u^2}$$

Bij nogmaals integreren van (15) vindt men

$$f = q_0 \int \frac{1}{u} e^{-u^2} du, \quad \text{of} \quad f = \frac{q_0}{2} \int \frac{1}{u^2} e^{-u^2} du^2.$$

Men kan deze uitkomst schrijven in den vorm van een bepaalde integraal:

$$f = \frac{q_0}{2} \int_{\infty}^{u^2} \frac{e^{-t}}{t} dt + C_2,$$

waarin C_2 een tweede integratieconstante voorstelt. Volgens randvoorwaarde (12) moet voor $u = \infty$ de grootheid $f = 0$ worden, waaruit volgt $C_2 = 0$, dus

$$f = \frac{q_0}{2} \int_{\infty}^{u^2} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

dus ook:

$$(17) \quad \varphi = \frac{q_0}{2} \int_{\infty}^{u^2} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Voor genoemde integraal bestaan tabellen. In Jahnke Embde 1) wordt een tabel gegeven voor

$$\text{Ei}(-x) = \int_{\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

welke tabel echter in dit werk is weergegeven.

Voor kleine waarden van x kan men deze functie berekenen, door den eersten term, eventueel de eerste termen, te gebruiken van de reeks, waarin de functie ontwikkeld kan worden. Deze reeks luidt:

$$\text{Ei}(-x) = \ln \gamma x - x + \frac{x^2}{2!2} - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^4}{4!4} - \frac{x^5}{5!5} \dots$$

waarin $\gamma = 1,781072$

Volstaat men met alleen den eersten term, waardoor

$$(18) \quad \varphi = \frac{q_0}{2} \ln \gamma u^2 \quad \text{of}$$

$$(18^1) \quad \varphi = q_0 (\ln u + 0,2837),$$

dan wordt een fout gemaakt, welke voor

1) Jahnke Embde - Funktionentafeln, derde druk, 1938 - Blz. 6.

$$u^2 = 0,01 \quad , \quad 0,3\% \quad \text{en voor}$$

$$u^2 = 0,1 \quad , \quad 5,5\% \quad \text{bedraagt.}$$

Meestal zal men dus met deze benadering kunnen volstaan voor waarden van u^2 kleiner dan 0,01.

Voegt men een term bij, waardoor

$$\varphi = \frac{q_0}{2} \left(\ln \sqrt{u^2 - u^2} \right),$$

dan wordt een fout gemaakt, welke bij

$$u^2 = 0,1 \quad , \quad 0,14\%$$

bedraagt.

Deze vorm zal in den regel voldoende zijn, om de waarden van de functie te berekenen in het interval tusschen $u^2 = 0,01$ en $u^2 = 0,1$. Voor grootere waarden kan men voldoende nauwkeurig interpoleeren tusschen de waarden van de genoemde tabel.

par. 11. Analyse van de uitkomst.

Als men uit verg. (18) van de vorige par. door differentiatie berekent $q = u^2$, vindt men als uitkomst $q = q_0$, d.w.z. in het gebied, waarin de benadering met een logarithmische kromme verantwoord is, is q bij benadering constant. Met behulp van verg. (16) kan men bepalen, hoeveel q bij kleine waarden voor u^2 afwijkt van q_0 . Bij $u^2 = 0,01$ vindt men een fout van 1%; bij $u^2 = 0,1$ een fout van 9,5%. Als voorbeeld kan worden genomen, dat de grens, waarvoor $u^2 = 0,1$ is, op 50 m. afstand van de bron ligt na 2,4 dagen, wanneer $kD = 1000 \text{ m}^2/\text{d}$ is en $\mu = 0,38$.

Wanneer q constant is, wil dit zeggen dat $\frac{\partial q}{\partial t}$ constant is, d.w.z. voor bepaalde waarde van x verandert $\frac{\partial q}{\partial t}$ niet met den tijd, m.a.w. het phreatisch oppervlak verplaatst zich zonder van vorm te veranderen rechtstandig naar beneden.

Dit is schijnbaar in tegenspraak met de continuïteitsvoorwaarde, welke zegt, dat als het niveau zakt, de afvoer q moet toenemen. Een meetbare daling van het niveau kan echter een te verwaarloozen hoeveelheid water opleveren, wanneer het oppervlak, waarover de daling plaats heeft, gering is. Bij een radiaal probleem als het hier behandelde, waarbij het oppervlak toeneemt met het kwadraat van den afstand tot de bron, is dit inderdaad het geval.

Men kan zich nu gemakkelijk rekenschap geven van de juistheid van de vervanging van de randvoorwaarde

$$\text{voor } x = r \quad , \quad q = q_0 \quad \text{door}$$

$$\text{voor } x = 0 \quad , \quad q = q_0.$$

Laat men hier een verschil van 5% in q toe, dan kan men met verg. (16) berekenen, dat $u = \frac{r}{\sqrt{4t}} \leq 0,226$ moet zijn. Hieraan zal in den regel bij in de practijk voorkomende puttenbemalingen wel voldaan worden. Stelt men $r \leq 0,20$ m. (gerekend tot den buitenkant van de omstorting van het filter), dan vindt men uit de grensvoorwaarde: $t^{\frac{1}{2}} > 0,195$. Neemt men voor kD een lage waarde aan van b.v. $50 \text{ m}^2/\text{d}$ en voor μ , 0,25, dan moet $t > 0,00975$ dag zijn d.i. $> \text{ca } 1\frac{1}{2}$ minuut.

Voor $x = r$ is men dus steeds in het logarithmische gebied, behalve kort na het begin van de beweging. Voor de peildaling in den put kan men dus schrijven:

$$\varphi = \frac{q_0}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{4t}}{r} \right).$$

Men zou een nieuw begrip kunnen invoeren: de invloedssfeer van den put, te definiëren als het gebied, waarbuiten q kleiner is dan b.v. 5% van q_0 . Dit gebied wordt begrensd door $u = 1,73$. Ten tijde t reikt het tot $x = 3,45 \sqrt{4t}$. Het invloedsg gebied breidt zich dus evenredig aan \sqrt{t} uit.

In fig. 7a is φ als functie van x voorgesteld op verschillende tijdstippen, die gelijke bedragen verschillen, terwijl in fig. 7b het verloop van φ met den tijd is gegeven ter plaatse van den put.

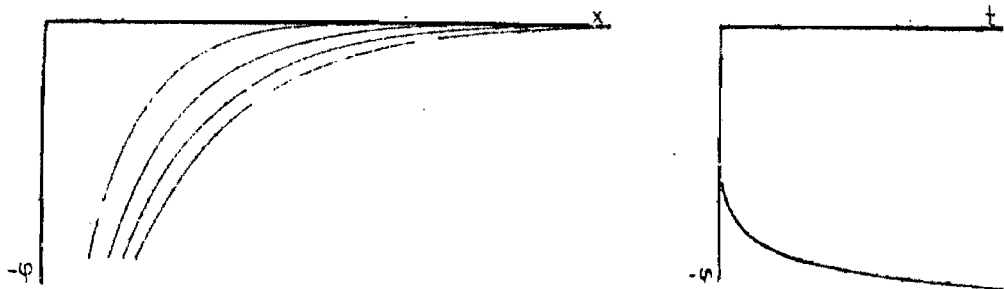


Fig. 7. Toestrooming naar een put.

TOEPASSINGEN.

par. 12. Toepassing 1.

Aan een kanaal wordt gedurende 12 tijdseenheden constant een zoo groote hoeveelheid water onttrokken, dat na afloop van de 12e periode een peilverlaging van 1 m. bereikt is. Bedoeld is de onttrekking per m¹ oeverlengte. De onttrekking per m¹ kanaal is dus $2 Q_0$. Daarna wordt de onttrekking gestaakt. Het kanaal zal daarna weer in peil rijzen, doordat het water blijft toevloeien. Gevraagd wordt, deze rijzing te berekenen als functie van den tijd.

Men kan het geval berekenen, door ten tijde $T = 12$ eenheden de aanvankelijke onttrekking te doen voortgaan, en van dit oogenblik af een voeding van Q_0 m³/dag te superponeeren.

De peildaling tengevolge van de onttrekking bedraagt volgens par. 4:

$$\varphi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0 t^{\frac{1}{2}},$$

of in andere notatie

$$(1) \quad \varphi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{kD\mu}} Q_0 T^{\frac{1}{2}}$$

Voor $T = 12$ is $\varphi = -1$, waaruit volgt, dat

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Q_0}{\sqrt{kD\mu}} = -\frac{1}{\sqrt{12}},$$

of na substitutie in (1) :

$$(2) \quad \varphi = -\frac{1}{\sqrt{12}} T^{\frac{1}{2}}$$

De stijging van het peil door de voeding bedraagt

$$(3) \quad \varphi = +\frac{1}{\sqrt{12}} (T-12)^{\frac{1}{2}},$$

zoodat van $T = 0$ tot $T = 12$ de waarden van φ gegeven worden door verg. (2), na $T = 12$ door de waarden van (2) vermeerderd met die van (3).

De uitkomst is voorgesteld in fig. 8. Het kanaalpeil stijgt blijkbaar dadelijk na het stopzetten van de onttrekking snel. Na verloop van langen tijd nadert φ tot nul.

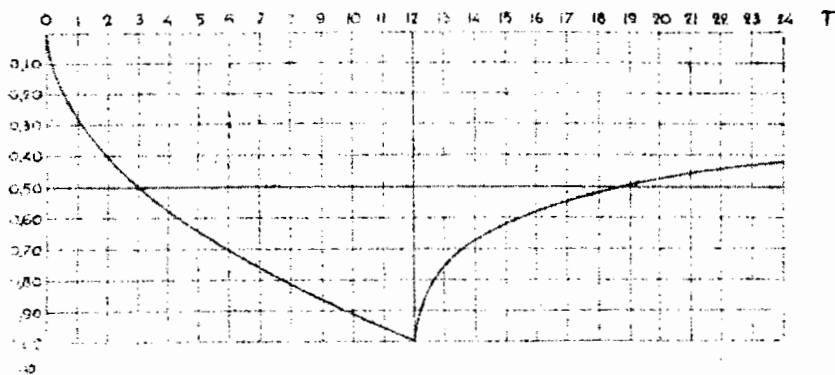


Fig. 8. Verandering van den waterstand in een kanaal, dat gedurende 12 perioden wordt bemalen en dan met rust gelaten.

par. 13. Toepassing 2.

Een kanaal wordt beurtelings om het halve jaar afgepompt en gevoed met een constant blijvende capaciteit Q_0 per meter kanaalover, uitgaande van den rusttoestand en te beginnen met een onttrekking. Gevraagd wordt het verloop van φ met den tijd in het kanaal zelf en op afstanden van 200 m. en 400 m. uit het kanaal. De peildaling na verloop van het eerste half jaar wordt = 1 m. gesteld. Verder is $\mu = 0,25$ en $kD = 100 \text{ m}^2/\text{dag}$.

Voor de berekening begint men met een onttrekking Q_0 ; na een halfjaarvoegt men een voeding $2Q_0$ toe, weer een half jaar later een onttrekking $2Q_0$ enz., waarbij iedere eenmaal toegevoegde voeding of onttrekking steeds voort blijftwerken.

De peildaling op het kanaal tengevolge van een onttrekking Q_0 is na een tijd T :

$$(1) \quad \varphi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0 t^{\frac{1}{2}}$$

Hierin is $q_0 = \frac{Q_0}{kD} = \frac{1}{100} Q_0$, waarbij Q_0 in m^3/d per m^1 kanaal wordt gemeten, dus feitelijk in m^2/d . De grootheid q_0 is dimensieloos; $t = \frac{TkD}{\mu} = 400 T$, waarbij T in dagen wordt geteld. De grootheid t wordt hierbij/uitgedrukt in m^2 .

Na een half jaar moet de peilverlaging 1 m bedragen. Substitueert men in (1): $\varphi = -1$ en $t = 400 \times \frac{365}{2} = 73.000 \text{ m}^2$, dan vindt men $q_0 = 0,00330$ en $Q_0 = 0,33 \text{ m}^3/\text{dag}$ per m^1 oeverlengte.

De berekening krijgt een meer algemeene betekenis als men bedenkt, dat φ evenredig is met Q_0 , zoodat de uitkomsten met weinig moeite voor andere Q_0 zijn om te rekenen.

Substitueert men deze waarde voor q_0 in (1), dan gaat deze over in

$$(2) \quad \varphi = -0,00370 t^{\frac{1}{2}}$$

Voor de voeding met $2Q_0$, die na een half jaar begint, geldt:

$$(3) \quad \varphi = +0,0074 (t - 73000)^{\frac{1}{2}},$$

voor de onttrekking met $2Q_0$, die na een jaar begint, geldt

$$(4) \quad \varphi = -0,0074 (t - 146.000)^{\frac{1}{2}}$$

en zoo vervolgens. De waarden van φ tijdens het eerste halfjaar worden bepaald door (2), tijdens het tweede halfjaar door (2) + (3), tijdens het derde halfjaar door (2) + (3) + (4) enz. De uitkomst is voorgesteld in fig. 9a.

Betreffende den waterstand in het kanaal zijn twee dingen van belang:

1) De amplitude, waaronder hier verstaan wordt het verschil tusschen het hoogste peil aan het einde van het jaar, en het laagste peil in het midden van het jaar. Deze amplitude nadert na verloop van tijd een limietwaarde, die aan de hand

van onderstaande tabel geschat kan worden op 1.52 m. Het blijkt, dat de amplitu-
de in het eerste jaar slechts ruim 4% grooter is dan de limietwaarde, zoodat men

kan zeg-
gen, dat
wat de am-
plitude
betreft,
de bewe-
ging op
den even-
wichts-
stand in-
gesteld
is.

2) Het ge-
middelde
van het
hoogste
peil aan
het eind
van het
jaar en
het laag-
ste peil
in het
midden
van het
jaar, waar-
mee de
ligging
van de
kromme
t. o. v. de
lijn $\psi = 0$
wordt aan-
gegeven.
Dit ge-

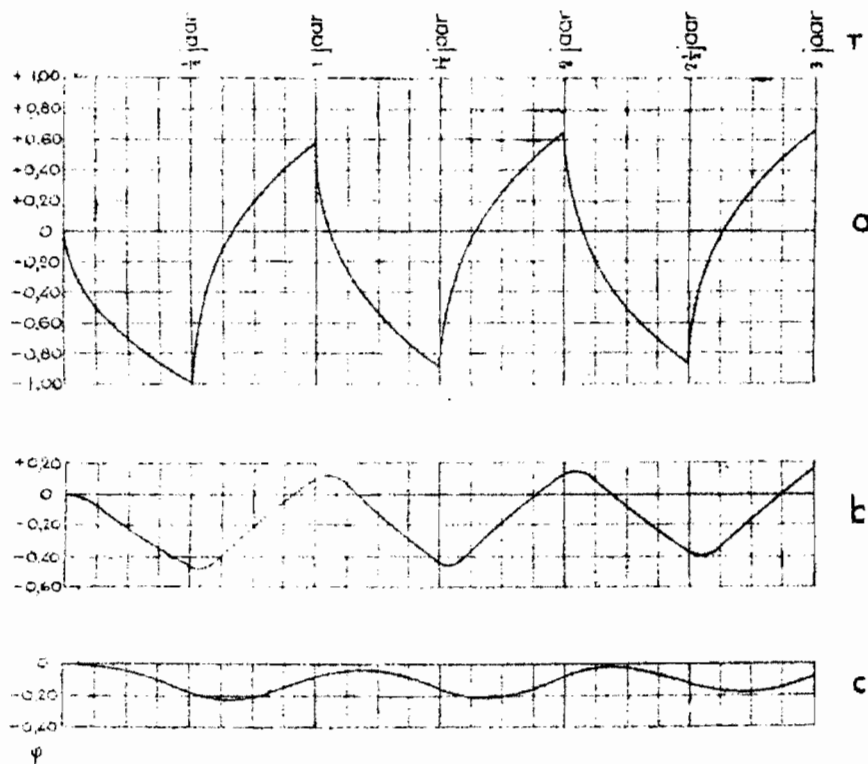


Fig. 9. Waterstand in het kanaal en op twee plaatsen op eenigen af-
stand van het kanaal, bij afwisselend afmalen en voeden.

middelde ligt voortdurend onder nul en nadert na langen tijd een limiet $\psi = 0$.

Blijkens de tabel is deze beweging echter uiterst langzaam. Dat het gemid-
delde steeds onder nul ligt, komt doordat met een onttrekking begonnen is; was met
een voeding begonnen, dan lag de lijn evenveel boven nul als nu er onder.

Waterstanden in meters.

jaar	laagste punt midden jaar	hoogste punt eind jaar	amplitude	gemiddelde v. hoogste en laagste peil
1	-1	+0,5858	1,5858	- 0,2071
2	-0,9036	+0,6357	1,5393	- 0,1340
3	-0,8717	+0,6583	1,5300	- 0,1067
4	-0,8546	+0,6722	1,5268	- 0,0912
8	-0,8250	+0,6980	1,5230	- 0,0635
50	-0,7858	+0,7358	1,5216	- 0,0500

Verder zijn geteekend de lijnen voor 200 en 400 m (fig. 9 b en c), welke
op overeenkomstige wijze berekend worden met de formule

$$\varphi = -q_0 t^{\frac{1}{2}} f_2(u)$$

De grootte u is voor de punten op 200 en 400 m afstand van het kanaal respectievelijk $\frac{200}{\sqrt{t}}$ en $\frac{400}{\sqrt{t}}$.

Voor de voeding, welke na een half jaar begint, is voor het punt op 200 m afstand van het kanaal

$$\varphi = +2q_0(t - 730000)^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{200}{\sqrt{t - 730000}}\right)$$

Zoals uit de figuur blijkt, kenmerken de lijnen zich door demping en phaseverschuiving, welke laatste het gevolg is van het feit, dat voor iedere gesuperponeerde beweging, voor $t=0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ is (zie fig. 4). Is de waterspiegel dus aan het einde van een halfjaarlijkse periode dalende, dan is de nieuw gesuperponeerde beweging in het eerst niet in staat den zin van de beweging om te keeren. Pas wanneer $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ van de nieuwe beweging tegengesteld gelijk is aan die van alle voorafgaande bewegingen samen, houdt de daling op, en gaat over in een stijging. Zoals uit fig. 4 te verwachten was, is dit op 200 m afstand van het kanaal eerder het geval dan op 400 m.

par. 14. Toepassing 3.

Aan een lang, recht kanaal wordt, uitgaande van den toestand van volkomen rust, gedurende een tijd t_0 een constante hoeveelheid water q_0 per m^1 oeverlengte onttrokken. Daarna wordt de onttrekking in verminderde mate voortgezet, zoodanig dat het peil van het kanaal niet meer verandert. Wordt gevraagd de hoeveelheid water q , die op een tijdstip τ ($\tau > t_0$) wordt onttrokken.

Gedurende de periode van $t=0$ tot $t=t_0$ daalt de waterstand in het kanaal volgens de formule van par. 4 a.v.

$$(1) \quad \varphi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} q_0 t^{\frac{1}{2}}$$

Men kan de gegevens van het vraagstuk dus ook anders formuleeren en wel: gedurende een tijdvak van $t=0$ tot $t=t_0$ wordt, uitgaande van den rusttoestand, de waterspiegel verlaagd volgens (1), en na het tijdstip $t=t_0$ op het dan bereikte peil gelaten. Van het geval waarbij $0=0$ is de waterstrooming bekend, die optreedt, wanneer de kanaalpeigel plotseling met een bedrag dy verlaagd wordt. Tijdens het interval van $t=0$ tot $t=t_0$ hebben continu dergelijke elementaire peilverlagingen plaats, terwijl het constant blijven van het peil na het tijdstip $t=t_0$ met deze voorstelling in overeenstemming is, wanneer men na dit tijdstip geen peilveranderingen meer in rekening brengt. Door differentiatie van (1) verkrijgt men voor de elementaire peilverandering ten tijde t ($0 < t < t_0$):

$$(2) \quad dy = -\frac{q_0}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

welke ten tijde τ ($\tau > t_0$) een toevloeiing naar het kanaal veroorzaakt, volgens verg. 7 van Par. 3 groot

$$(3) \quad dq = -\frac{dy}{\sqrt{\pi}} (\tau - t)^{-\frac{1}{2}}$$

of, na substitutie van de waarde voor dy uit (2):

$$dq = \frac{q_0}{\pi} t^{-\frac{1}{2}} (\tau - t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

De totale waarde van q ten tijde τ bedraagt blijkbaar:

$$q = \frac{q_0}{\pi} \int_0^{t_0} t^{-\frac{1}{2}} (\tau - t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

wat na integratie oplevert:

$$q = \frac{2}{\pi} q_0 \log \sin \sqrt{\frac{t_0}{\tau}}$$

Deze functie is in fig. 10 afgebeeld. Voor $t=t_0$ is de raaklijn aan de kromme verticaal. Ten tijde $\tau=2t_0$ bedraagt q nog precies de helft van q_0 ; ten tijde

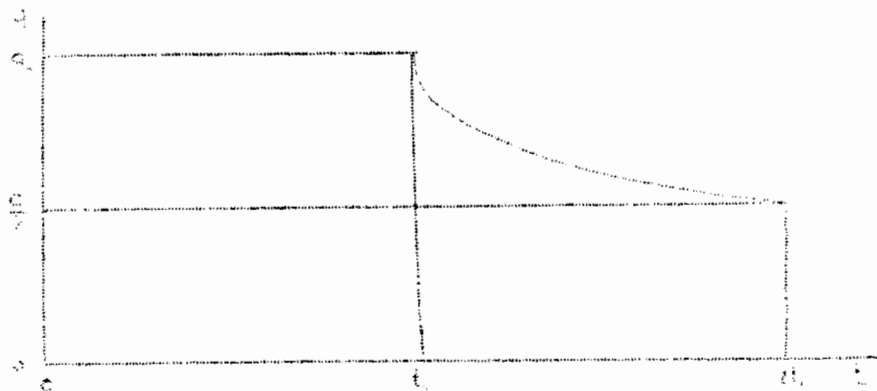


Fig. 10. Waterlevering door een kanaal, wanneer eerst een constante hoeveelheid wordt onttrokken en daarna het peil constant wordt gehouden.

$T = 4t_c$ (niet op de tekening) wordt $q = \frac{1}{3} q_0$.

par. 15. Toepassing 4.

In deze par. zal een toepassing worden gegeven, die fysisch afwijkt van de besproken problemen, maar door redeneering tot dezelfde groep mathematische vraagstukken is terug te brengen, en wel tot het geval waarvoor $N = 2$, terwijl ook het "spiegelen" van stroombeelden wordt toegepast. Het gaat er hier minder om, de geheele berekening numeriek uit te werken, dan wel om aan te geven, hoe dit probleem is terug te brengen tot de besproken elementaire gevallen. De beschouwing zal daardoor meer kwalitatief dan kwantitatief zijn.

Het is een bekend verschijnsel, dat de nuttige neerslag, dat is dat gedeelte van den neerslag, dat in den grond dringt en aan het grondwater ten goede komt, niet gelijkmatig over het jaar verdeeld is. Met name zijn er streken waar de zomerregens vrijwel niet tot den nuttigen neerslag bijdragen. Men kan dit geval op de eenvoudigste manier schematiseeren, door aan te nemen, dat de nuttige neerslag gedurende de helft van het jaar constant is, gelijk aan N meter per dag, en gedurende de andere helft van het jaar gelijk aan nul.

Men kan nu de vraag stellen: wanneer tusschen twee evenwijdige kanalen op afstand L meter, met hetzelfde constante kanaalpeil de nuttige neerslag op deze intermitterende wijze valt, hoe verandert dan met verloop van den tijddhoeveelheid water, die naar ieder der kanalen afstroomt. Stelt men dit verband grafisch voor, dan zal men een lijn vinden, die om een gemiddelde schommelt, en dit gemiddelde zal de hoeveelheid water zijn, die afvloeit als de nuttige neerslag gedurende het geheele jaar constant is en $= \frac{1}{2} N$. In dit geval is het phreatisch oppervlak een parabool, en stroomt per kanaal af een hoeveelheid $q = \frac{1}{4} N \frac{L}{kD}$. Stelt men $\frac{N}{kD}$ voor door n , dan is $q = \frac{1}{4} n L$. De genoemde grafiek is weergegeven in fig. 12. Hier is $\frac{q}{L}$ uitgezet tegen t , waarbij is uitgegaan van de waarde $L = 1000$ m en verder $kD = 100$ m²/dag en $\mu = 0,25$. (Bij deze waarden is evenals in toepassing 2: $q = \frac{q_0}{2} = \frac{q_0}{4}$ en $t = \sqrt{\frac{kD}{\mu}} T = 400 T$. De lijn slingert om de gemiddelde waarde $\frac{q}{n} = \frac{L}{4} = 250$ m.

In deze figuur is de toestand afgebeeld die ontstaat als langen tijd achtereen de nuttige neerslag op de boven aangegeven wijze verandert. Men kan dezen toestand berekenen, door b.v. uit te gaan van een horizontalen waterstand tusschen de kanalen en het proces dan te volgen, wanneer beurtelings een nat en een droog half jaar elkaar opvolgen. De grondwaterspiegel in het gebied tusschen de kanalen zal dan op- en neergaande bewegingen vertoonen en na een lange reeks van jaren gaan schommelen om de bovengenoemde gemiddelde lijn van parabolischen vorm. Deze wijze van berekenen is echter omslachtig. Men kan sneller tot het resultaat komen, door uit te gaan van een (stationnaire) bogintoestand, die in het gebied

ligt, waarin na langen tijd de schommelingen plaats hebben, en het ligt voor de hand hiervoor den parabolischen waterspiegel te nemen, overeenkomende met een constanten nuttigen neerslag $\frac{1}{2} N$, dus met de eerstgenoemden gemiddelden toestand. Een tweede bekorting wordt gevonden in de overweging, dat de gemiddelde toestand het minst wordt benaderd ophet einde van de natte of op het einde van de droge periode, maar ten naasten bij zal worden aangetroffen in het midden van beide perioden. Daarom is het beter, uitgaande van den gemiddelden toestand, met $1/4$ jaar nuttigen neerslag te beginnen, en daarna halfjaarlijksche wisselingen te veronderstellen.

Dit probleem zou door superpositie op te lossen zijn, wanneer men de oplossing zou kennen van een ander, elementair geval en wel: hoe is het verloop met den tijd van de hoeveelheid water, die op de kanalen toestroomt, wanneer, uitgaande van den rusttoestand $\psi = 0$, de nuttige neerslag constant, gelijk aan N is. Men zou dan het onderstaande schema van superpositie moeten volgen:

1. Begintoestand, stationnaire toestand met nuttigen neerslag $\frac{1}{2} N$. Deze stelt den gemiddelden toestand voor, waaromheen de schommelingen plaats hebben.
2. Hierop superponeren, het niet stationnaire stroombeeld, dat ontstaat door, uitgaande van den rusttoestand $\psi = 0$, een nuttigen neerslag $1/2 N$ in rekening te brengen. De totale nuttige neerslag wordt daardoor $\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} N = N$.
3. Het stroombeeld 1 + 2 laten doorgaan, maar na $1/4$ jaar door superpositie in rekening brengen het niet-stationnaire stroombeeld, dat ontstaat door, uitgaande van den rusttoestand $\psi = 0$ een nuttigen neerslag $- N$ in rekening te brengen. De totale nuttige neerslag wordt daardoor $+ N - N = 0$.
4. Het stroombeeld 1 + 2 + 3 laten doorgaan, maar na $1/2$ jaar op dezelfde wijze een nuttige neerslag $+ N$ superponeren, waardoor de totale nuttige neerslag $0 + N = N$ wordt.
5. enz. zoo voortgaande, om het half jaar beurtelings een nuttigen neerslag $- N$ en $+ N$ toevoegen.

Rest dus nog, het bovengenoemde elementaire geval op te lossen: het berekenen van de niet-stationnaire grondwaterbeweging tusschen twee kanalen met peil $\psi = 0$, waartusschen, uitgaande van den rusttoestand ($\psi = 0$), ononderbroken een nuttige neerslag N valt. Wegens relativiteit van bewegingen mag men dit vraagstuk ook als volgt formulieren: het berekenen van de niet-stationnaire grondwaterbeweging tusschen twee kanalen, uitgaande van den rusttoestand ($\psi = 0$), wanneer tusschen de kanalen geen nuttige neerslag valt, maar de peilen in de kanalen gelijkelijk verlaagd worden, zoodanig, dat $\psi = \alpha t$, waarin α een constante voorstelt.

Er bestaat hierbij een verband tusschen N en α . Zou een nuttige neerslag N vallen op een terrein, waarin geen zijdelingsche afstroming plaats heeft, dan zou de grondwaterspiegel rijzen met een snelheid $\frac{\psi}{t} = \frac{N}{t}$ of in andere notatie $\frac{\psi}{t} = n$. Deze snelheid moet tegengesteld gelijk zijn aan de snelheid, waarmee het water in het kanaal daalt, en deze is $\frac{\psi}{t} = \alpha$, zoodat $n = -\alpha$.

De laatstgenoemde beweging, waarbij de waterspiegel in beide kanalen gelijktijdig daalt, is nogmaals door superpositie te ontleden in twee bewegingen en wel in één, waarbij het water alleen in het ééne kanaal daalt, en het peil in het andere kanaal onveranderd blijft, en een tweede beweging, gelijk aan de eerste, maar met verwisseling der kanalen. Hiermee is het vraagstuk teruggebracht tot reeds besproken problemen.

In fig. 11 is het verband tusschen ψ en t gegeven voor het geval beide kanalen op peil blijven, en de nuttige neerslag voortdurend N bedraagt, waarbij uitgegaan wordt van den rusttoestand ($\psi = 0$). De grootte ψ neemt in den beginne zeer sterk toe, later minder, en nadert een eindwaarde van $\frac{\psi}{n} = 500$.

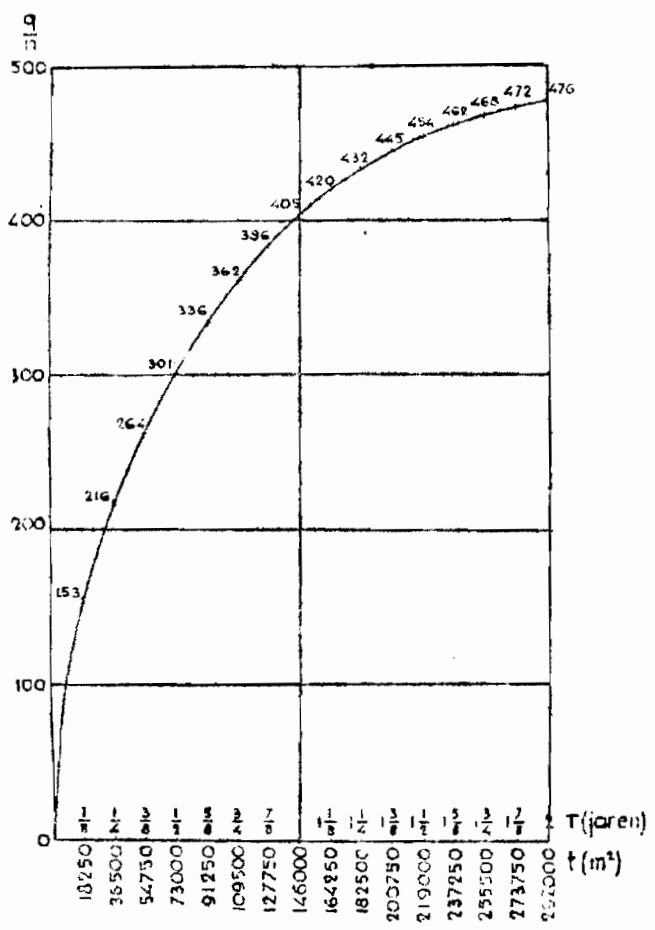


Fig. 11. Afstroming bij constanten nuttigen neerslag tussehen twee kanalen.

In fig. 12 is de einduitkomst aangegeven. Het blijkt, dat Q dadelijk sterk verandert, als de nuttige neerslag begint of eindigt. Blijkens de cijfers, die bij de kromme zijn geschreven, en die de verschillenmoethet gemiddelde van 250 aangeven, is de uiteindelijke toestand al dadelijk vrij goed benaderd. Er zijn halve jaren met meer, en halve jaren met minder dan de gemiddelde afvloeiing naar de kanalen. Deze liggen bij-

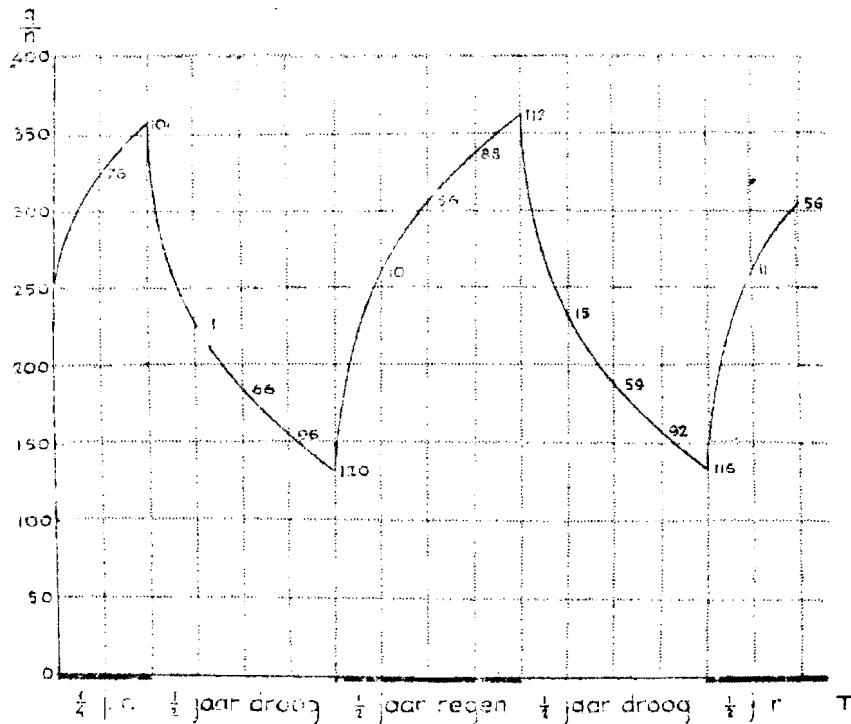


Fig. 12. Afstroming bij wisselenden nuttigen neerslag tus-schen twee kanalen.

na $1/8$ jaar verschoven t.o.v. de perioden, waarin de nuttige neerslag wel of niet valt. De oppervlakte van de figuur geeft de hoeveelheid water aan, die in zeker tijdperk naar een kanaal afvloeit. Uit opmeting van de oppervlakken volgt, dat er halve jaren zijn met ca 75% en halve jaren met ca 125% afvloeiing, als het gemiddelde op 100% gesteld wordt.

par. 16. Toepassing 5.

De differentiaalvergelijking voor den afgerompten put, bij constant door-stroomprofiel D is lineair in ψ . Bij de bemaling van een groep putten mogen daardoor de stroombeelden van de afzonderlijke putten op elkaar gesuperponeerd worden. Een groepsgewijze opstelling van putten komt o.m. voor bij waterleiding-bedrijven en bij het bemalen van een bouwput.

Bij de hieronder volgende afleiding zal gemakshalve worden aangenomen, dat alle putten evenveel water leveren. In de werkelijkheid zal aan deze voorwaarde meestal niet worden voldaan, maar wanneer men voor alle putten de gemiddelde levering in rekening brengt, zal men voor een punt, op eenigen afstand van de groep gelegen een peildaling vinden, die weinig van de juiste afwijkt. Ook voor de peil-dalingen in de putfilters zelf zal men veelal met deze vereenvoudigende aanname werken, om gecompliceerde berekeningen te ontgaan. Bovendien is het mogelijk, na-derhand correcties aan te brengen, die hier buiten beschouwing blijven.

Het superponeren van de invloeden van meerdere bronnen op elkaar biedt in principe geen moeilijkheden; er bestaat echter een methode om de uitkomst snel te vinden. Men teekent daartoe op wit papier den plattegrond van de groep putten, en geeft hierin tevens het punt A aan, waarin op zeker tijdstip t , de peilverla-ging gezocht wordt. Op een transparantpapier teekent men concentrische cirkels met stralen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, enz. op dezelfde schaal als de plattegrond van

de putten. Deze waarden berekent men zoodanig, dat de peilverlaging tengevolge van de afpompung van één der putten, wanneer deze geplaatst zou worden in het middelpunt van den cirkel, in iedere cirkel een rond bedrag zou opleveren, b.v. 1,00, 0,90, 0,80, 0,70 enz. meter. De berekening van x_1, x_2, x_3, x_4 , enz. geschiedt met behulp van de formule:

$$\gamma = \frac{q_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{t} dt,$$

waarin $u = \frac{r^2}{4t}$. Hierin is \mathcal{L} de enige onbekende.

Legt men de transparante figuur met het middelpunt op A, dan kan men dadelijk aflezen, welke peilverlagingen ter plaatse van de diverse putten zouden ontstaan tengevolge van de bemaling van een put in A. Men mag de afgelezenwaarden echter ook anders opvatten, en wel als de peilverlagingen in A als gevolg van de bemaling van ieder der putten van de groep. De som van de afgelezenwaarden geeft dan de totale peildaling in A.

Wil men de peildaling in A op een ander tijdstip nt kennen, dan moet men een nieuwe figuur op transparant papier teekenen. Aangezien ψ alleen afhangt van $\frac{r}{\sqrt{4t}}$, worden dezelfde waarden van ψ bereikt voor waarden van x , die \sqrt{n} x zoo groot zijn. Alle cirkels moeten dus \sqrt{n} x zoo groot worden geteekend.

Op dezelfde wijze kan men de peildaling in de putfilters zelf berekenen, voorzover den invloed betreft van de andere putten; de invloed van de put zelf moet afzonderlijk berekend worden met behulp van de formule

$$\psi = \frac{q_0}{2} \ln \left(\gamma \frac{r^2}{4t} \right).$$

par. 17. Veranderend doorstroomprofiel.

Tot dusverre is het probleem van de niet-stationnaire grondwaterbeweging in de omgeving van een recht kanaal of van een put alleen behandeld voor constant doorstroomingsprofiel D. Wanneer dit profiel niet constant verondersteld wordt, moet een nieuwe grootheid H ingevoerd worden, die den afstand aangeeft van den bovenkant van de ondoordringbare laag tot aan het phreatisch vlak in den aanvankelijken rusttoestand (tevens het nulvlak van de potentiaaltelling). Het doorstroomprofiel kan dan met $H + \psi$ (ψ is negatief) aangeduid worden.

Bij het geval, waarbij het water op een kanaal toestroomt, luidt de wet van Darcy:

$$(1) \quad Q = k(H + \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

en de continuïteitsvergelijking:

$$(2) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Voert men in $q = \frac{Q}{kH}$ en $t = \frac{tkH}{\mu}$, dan gaan de vergelijkingen over in:

$$(1') \quad q = \left(1 + \frac{\psi}{H} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

en

$$(2') \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Door Q hieruit te elimineeren vindt men de differentiaalvergelijking:

$$(3) \quad \left(1 + \frac{\psi}{H} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Hieraan wordt voldaan door een functie ψ , bepaald uit

$$(4) \quad 1 + \frac{\psi}{H} = t^{2/n} f \left(\frac{x}{2t^{n-1/2}} \right),$$

waarin f een nader te bepalen functie voorstelt en n een parameter. Men kan zich van de juistheid hiervan overtuigen door substitutie in de differentiaalvergelijking.

Voor het gestelde probleem is alleen het geval van belang, dat $n = 0$ is. Twee randvoorwaarden luiden n.l., dat voor $x = \infty$ en voor $t = 0$, $\varphi = 0$ moet zijn. De grootte $\frac{x}{2t^{n+\frac{1}{2}}}$ wordt zoowel voor $x = \infty$ als voor $t = 0$ gelijk aan ∞ , zoodat voldaan moet worden aan:

$$\begin{aligned} &\text{voor } x = \infty, \quad 1 + t^{2n} f(\infty), \\ &\text{voor } t = 0, \quad 1 + 0^{2n} f(\infty). \end{aligned}$$

Men kan $f(\infty)$ niet een zoodanige waarde geven, dat aan deze voorwaarden voldaan is, tenzij $n = 0$, in welke geval beide voorwaarden overgaan in:

$$(5) \quad 1 = f(\infty).$$

Vergelijking (4) wordt dan

$$1 + \frac{\varphi}{H} = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(u),$$

wat bij differentiatie oplevert $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{2} t^{-\frac{1}{2}} f'$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{H}{4} t^{-\frac{1}{2}} f''$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{H}{2} t^{-\frac{1}{2}} u f'$.

Substitutie in de differentiaalvergelijking (3) geeft:

$$(6) \quad f f'' + f'^2 + 2u f f' = 0, \quad \text{of anders geschreven}$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{2} f f' \right) + 2u f f' = 0.$$

Hierin is

$$f' = \frac{df}{du} \quad \text{en} \quad f'' = \frac{d^2 f}{du^2}.$$

Wat de randvoorwaarden betreft, twee der randvoorwaarden van het probleem leiden tot de voorwaarde van verg. (5):

$$(5') \quad \text{voor } u = \infty, \quad f(u) = 1.$$

Verder kan men als voorwaarde stellen:

$$(7) \quad \text{voor } u = 0, \quad f(u) = 1 + \frac{\varphi_0}{H}.$$

De fysische beteekenis hiervan is, dat op het kanaal ($x = 0$, dus $u = 0$) de waterstand plotseling van de beginwaarde 0 op een constant peil φ_0 gebracht wordt. Deze toestand komt overeen met het vroeger besproken geval, waarvoor n eveneens $= 0$ is.

Een oplossing van de vergelijking (6) heb ik niet gevonden. De geven afleiding kan dus dienen als basis voor verder onderzoek of ook als grondslag voor benaderingsformules.

Men kan dezelfde afleiding maken voor het geval, dat water toestroomt op een put (het radiale geval dus). Dan luidt de wet van Darcy:

$$Q = k 2\pi x (H + \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

en de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu 2\pi x \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Stelt men $\frac{Q}{2\pi k H} = q$ en $\frac{t}{k H} = \tau$, dan volgt na substitutie:

$$(8) \quad q = x \left(1 + \frac{\varphi}{H}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = x \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}.$$

Na eliminatie van Q volgt:

$$(9) \quad \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\varphi}{H}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\varphi}{H}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}.$$

Ook hieraan wordt voldaan door een oplossing van den vorm:

$$1 + \frac{\varphi}{H} = t^{2n} f\left(\frac{x}{2t^{n+\frac{1}{2}}}\right).$$

Om dezelfde reden als bij het geval van overwijdige strooming heeft hier het ge-

val, dat $n=0$ is, physische beteekenis. Men stelt dan in overeenstemming met het voorgaande:

$$1 + \frac{\varphi}{H} = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(u).$$

Bij differentiatie levert dit op: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H}{2} t^{-\frac{1}{2}} f'$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{H}{4} t^{-\frac{3}{2}} f''$

en $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{H}{2} t^{-\frac{3}{2}} u f'$. Bij substitutie in de differentiaalvergelijking verkrijgt men:

$$(10) \quad u f f'' + u f'^2 + f f' + 2u^2 f' = 0,$$

of anders geschreven:

$$(101) \quad \frac{d}{du} (u f f') + 2u^2 f' = 0.$$

Aan deze differentiaalvergelijking van de tweede orde mag men twee voorwaarden opleggen. Twee der randvoorwaarden van het probleem luiden, dat voor $x=\infty$ en voor $t=0$, $\varphi=0$ is. Zij leiden tot:

$$(11) \quad \text{voor } u=\infty, \quad f(u)=1$$

Als tweede voorwaarde kan men stellen:

$$(12) \quad \text{voor } u=0, \quad u f f' = \frac{q_0}{H}.$$

Het geval komt dan overeen met het vroeger behandelde. De put wordt, uitgaande van een begintoestand, waarbij $\varphi=0$ is, afgepompt met constante onttrekking.

De laatste voorwaarde kan men als volgt afleiden: Volgens (8) is

$$q = x \left(1 + \frac{\varphi}{H}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad \text{Substitueert men hierin: } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H}{2} t^{-\frac{1}{2}} f', \quad \text{dan volgt:}$$

$$q = (H + \varphi) u f', \quad \text{een aangezien } 1 + \frac{\varphi}{H} = f(u), \quad \text{is } \frac{q}{H} = u f f'.$$

Feitelijk moet de voorwaarde nu luiden: voor $x=r$ is $u f f' = \frac{q_0}{H}$, maar evenals vroeger kan gesteld worden: voor $x=0$ dus voor $u=0$ is $u f f' = \frac{q_0}{H}$.
Ook verg. (10) heb ik niet opgelost.

par. 18. Literatuurbespreking.

Bremerkamp 1)

In een algemeene behandeling van de warmtegeleidingsvergelijking wordt als één van de beschouwde gevallen het geval besproken, waarvoor de oplossing wordt gegeven. De afleiding is echter een geheel andere dan de boven besproken.

Mazure 2)

Het hiervoor behandelde geval, waarvoor $n=0$ is, is door Mazure opgelost voor een probleem, dat mathematisch hetzelfde is, maar physisch geheel anders dan het besprokene. In de aangehaalde literatuur komt een studie voor van de water- en chloorbalans van het IJsselmeer. Eén van de vraagstukken, die hierin besproken worden, is de diffusie van zout, dat zich, opgelost in het grondwater, in den bodem van het meer bevindt. Vóór de afsluiting had de Zuiderzee n.l. een chloorgehalte van ongeveer 6000 mg/l, waardoor ook het grondwater in den bodem dit gehalte had. Het IJsselmeer heeft na verloop van een overgangperiode van een rijftal jaren een chloorgehalte bereikt van eenige honderden mg/l. Het zout in den bodem gaat nu diffundeeren, en vormt een post in de zoutbalans van het meer. Om de grootte van dien post te kunnen berekenen, heeft Mazure een plotselinge overgang van het ééne chloorgehalte van het meerwater naar het andere aangenomen. De differentiaalvergelijkingen voor dit geval komen geheel overeen met die voor de strooming van grondwater (dus de wet van Darcy en de continuïteitsvergelijking),

- 1) Dr. H. Bremerkamp - Partieele Differentiaalvergelijkingen, 1939, blaz. 114.
- 2) Rapport van de Commissie Drinkwatervoorziening Westen des Lands - Rijksuitgeverij 1940 - bijlage IX, de water- en zoutbalans van het IJsselmeer van de hand van Ir. J.P. Mazure, par. 13.

mits men aan de diverse grootheden een andere physische beteekenis geeft en wel:

φ = de concentratie van het zout,

x = de verticale afstand van het beschouwde punt tot den bodem van het meer.

Q = de diffundeerende zouthoeveelheid per eenheid van tijd.

De beteekenis van de coëfficiënten, die in de vergelijkingen voorkomen, wordt in de aangehaalde publicatie uitvoerig besproken. Mazure geeft dan als oplossing van het vraagstuk de uitkomsten, hier in par. 3 als verg. (6) en (7') genoemd, d.w.z. φ als functie van x en t , en q als functie van x en t . Een afleiding van deze uitkomsten wordt niet gegeven. De juistheid kan echter door substitutie in de differentiaalvergelijking aangetoond worden.

Het is niet noodzakelijk, de geleidelijke verandering van het chloorgehalte in het IJsselmeer te vervangen door een plotselinge, zooals door Mazure is gedaan. Met de formules van het geval $n = 2$ zou ook de geleidelijke verandering in rekening zijn te brengen.

Weber 1)

Weber behandelt het probleem van een put in phreatisch grondwater, die afgepompt wordt met een capaciteit Q_0 . Bij het afleiden van de formules wordt rekening gehouden met de mogelijkheid, dat Q_0 met den tijd varieert. Alleen het geval, dat Q_0 constant is zal echter aan de hiervoor afgeleide formules getoets kunnen worden. Verder wordt door Weber het doorstroomprofiel, d.i. de afstand tusschen het phreatisch vlak en den bovenkant van de afsluitende laag, als variabele ingevoerd. Deze grootheid wordt y genoemd, terwijl de afstand tusschen het aanvankelijke phreatische oppervlak en de afsluitende laag door H wordt voorgesteld. Aangezien alle door ons afgeleide formules gelden voor constant doorstroomprofiel D , kunnen de uitkomsten van Weber alleen geverifieerd worden voor het geval, dat $H - y$ klein is tegenover H . In de formules van Weber komt de grootheid $H^2 - y^2$ voor, waarvoor men mag schrijven $(H - y)(H + y)$. Nu stelt $H - y$ onze grootheid $-\varphi$ voor, terwijl voor $H + y$ in verband met het bovenstaande bij benadering $2D$ geschreven mag worden, zoodat $H^2 - y^2 = -2\varphi D$.

Weber veronderstelt nu, dat de invloed van een put zich tot op een afstand R doet gevoelen, waarbij R een grootheid is, die met verloop van den tijd toeneemt. Buiten den cirkel met straal R zou het grondwater in rust zijn. Uit het betoog blijkt niet, dat het Weber bekend is, dat de grondwaterbeweging zich al in het eerste oogenblik tot in het oneindige voortplant. Een voorstelling als door hem gegeven kan uiteraard theoretisch niet juist zijn, zooals blijkt uit de door ons afgeleide uitkomsten en zooals bovendien hieronder zal worden aangetoond.

In fig. 13 is het punt A voorgesteld, waar het afgepompte phreatische vlak het nog in rust zijnde onder een hoek α ontmoet. Wanneer het punt A zich met een snelheid v buitenwaarts verplaatst zal het zich na een tijd Δt in A' bevinden, waarbij de afstand tusschen A en $A' = v\Delta t$ is. In dien tijd is door de doorsnede A een hoeveelheid water gevloeid, die bepaald wordt door de gearceerde oppervlakte, en gelijk is aan $2\pi R \frac{1}{2} (v\Delta t)^2 \frac{1}{2} \alpha$.

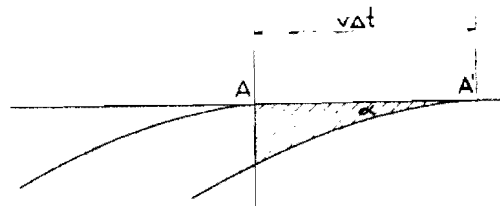


Fig. 13. Zich verplaatsende grens van het invloedsgebied.

Deze hoeveelheid is door de doorsnede A weggevloeid onder een verhang $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \alpha$. Hij kan dus berekend worden als $k_2 \pi R D \frac{1}{2} \alpha \Delta t$. Stelt men beide uitdrukkingen aan elkaar gelijk dan vindt men:

$$2\pi R \frac{1}{2} (v\Delta t)^2 \frac{1}{2} \alpha = k_2 \pi R D \frac{1}{2} \alpha \Delta t.$$

1) H. Weber. Die Reichweite von Grundwasser-absenkungen mittels Rohrbrunnen-Diss. Berlin 1928.

Hieruit kan Δt wegeschrapt worden, d.w.z. het betoog geldt voor iedere waarde van α en ook voor het grensgeval, dat α tot 0 nadert, d.w.z. wanneer het afgepompte phreatische vlak raakt aan het horizontale, zooals door Weber wordt verondersteld.

Laat men in bovenstaande vergelijking Δt tot nul naderen, dan wordt het linker lid oneindig klein van de 2de orde en het rechter oneindig klein van de 1e orde, waarmede de onjuistheid van de voorstelling bewezen is.

Al is de veronderstelling echter onjuist, toch kan deze zeer wel als benadering ingevoerd worden, omdat de peildaling op grooten afstand van een put gering zal zijn.

De afleiding, die Weber verder geeft, berust op een aanname, en wel dat het verloop van Q met κ wordt weergegeven door de vergelijking

$$(1) \quad q = q_0 \left[1 - \left(\frac{\kappa}{R} \right)^n \right], \quad \text{vgl. (3) blz. 10}$$

waarin, evenals in het volgende, onze notaties gevolgd worden. Hierin stelt n een parameter voor, waarvan naderhand wordt beredeneerd, dat deze bij het begin van de beweging = 1 is, en met het verloop van den tijd langzamerhand tot 2 toeneemt.

Combinatie met de wet van Darcy levert na integratie de formule voor de peildaling op, die geschreven kan worden als

$$(2) \quad \varphi = -q_0 \left(\ln \frac{R}{r} - \frac{1}{n} \frac{R^n - r^n}{R^n} \right), \quad \text{vgl. (5) blz. 10}$$

Bij het overbrengen in onze notaties is hierbij gebruik gemaakt van de bovengenoemde betrekking $H^2 - y^2 = -2\varphi D$.

Daarna wordt de continuïteitsvoorwaarde toegepast, die een verband vastlegt tusschen de hoeveelheid water, die van het tijdstip $t = 0$ af door den put verpompt is, zijnde $Q.t$, en den inhoud van den afpompingsstrecter. Hieruit wordt het verband tusschen R en t berekend. luidende

$$(3) \quad R = c \sqrt{t}, \quad \text{vgl. (8) blz. 13}$$

waarin $c = \sqrt{\frac{4(n+2)}{n}}$. Voert men nu de waarde van R uit (3) in de vergelijkingen (1) en (2) in, dan blijkt het, dat κ en T zich steeds laten samennemen tot $\frac{\kappa}{\sqrt{4nT}} = u$, zoodat q en φ geschreven kunnen worden als functies van u , en wel:

$$(4) \quad q = q_0 \left\{ 1 - u^n \left(\frac{r}{c} \right)^n \right\}$$

en

$$(5) \quad \varphi = -q_0 \left\{ \ln \frac{c}{r} \frac{1}{u} - \frac{1}{n} + \left(\frac{r}{c} \right)^n \frac{1}{n} u^n \right\}.$$

Het blijkt dus, dat de formules van Weber een goeden bouw hebben, doordat ze q en φ als functie van u geven. Wanneer het doorstroomprofiel niet constant aangenomen wordt, heeft verg.(5) een iets anderen vorm, die zich in onze notaties lastig laat weergeven. Ook in dat geval is φ echter een functie van u , wat volgens par. 17 juist is.

Onjuist is echter de opmerking, dat de functies (4) en (5) met het verloop van den tijd zouden veranderen doordat n van 1 tot 2 zou toenemen.

Een directe vergelijking met onze formules is mogelijk. Deze is in onderstaande tabel uitgevoerd voor enkele waarden van u :

u	φ/q_0			φ/q_0		
	Weber n = 1	Weber n = 2	exact bij de gestelde premissen	Weber n = 1	Weber n = 2	exact bij de gestelde premissen
0,1	0,942	0,995	0,990	1,9096	2,1517	2,0190
0,3	0,827	0,955	0,914	0,9265	1,0831	0,9593
0,5	0,711	0,875	0,779	0,5312	0,6023	0,5221
0,7	0,595	0,755	0,613	0,3102	0,3258	0,2860
0,9	0,480	0,595	0,445	0,1744	0,1545	0,1525
1,1	0,364	0,395	0,298	0,0891	0,0538	0,0780
1,3	0,249	0,155	0,184	0,0375	0,0067	0,0379
1,41		0	0,137		0	0,0245
1,5	0,133	-	0,1054	0,0099	-	0,0174
1,73	0	-	0,0503	0	-	0,0065

Bij kleine waarden van u kan men in verg. (5) den derden term tusschen de accoladen verwaarloozen tegenover de beide andere termen. De formule, die dan ontstaat, kan men schrijven:

$$\begin{aligned} \text{voor } n=1 \text{ als } \varphi/q_n &= \ln u + 0,4504 \text{ en} \\ \text{voor } n=2 \text{ als } \varphi/q_n &= \ln u + 0,1536, \end{aligned}$$

terwijl door ons was afgeleid:

$$\varphi/q_0 = \ln u + 0,2887 \text{ (verg. 18}^1 \text{ par. 10).}$$

Van de grootte van de afwijkingen kan men zich het best een indruk vormen, door de berekende waarden in een grafiek uit te zetten. Het blijkt dan, dat de formules van Weber een zeer goede benadering geven, waarbij de waarde $n=1$ zich beter bij de werkelijkheid aanpast dan $n=2$.

Campus. 1)

Campus heeft het probleem bestudeerd, waarbij het water toestroomt op een kanaal, waarin de waterstand, uitgaande van den rusttoestand, plotseling met een bedrag φ_0 verlaagd wordt en daarna op dit peil gelaten wordt (ons eerste geval) en verder het probleem van de put waaraan een constante hoeveelheid water Q_0 onttrokken wordt. Evenals Weber neemt Campus zonder nadere toelichting aan, dat de invloedssfeer zich beperkt tot een waarde, door hem l genoemd, die met den tijd toeneemt. Verder wordt door hem zonder bewijs aangenomen, dat de grootte $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, d.i. de daling van den waterspiegel per tijdseenheid evenredig is met den afstand r tot het kanaal, of tot de as van den put. Verder worden de wet van Darcy en de continuïteitsvergelijking toegepast, waaruit het verband tusschen l en t wordt afgeleid, in de notatie van Campus voor het geval van de evenwijdige strooming luidende:

$$(1) \quad l = 2 \sqrt{\frac{\varphi H E}{n}}$$

Bij de afleiding is uitsluitend aangenomen, dat φ klein is t.o.v. D . Bij het overbrengen in onze notaties mag daarom de grootte H vervangen worden door $2D$. De formule luidt dan in onze notaties:

$$l = 2\sqrt{2} \sqrt{VE}$$

De grootte l wordt dus bepaald door een waarde van $u = \sqrt{2}$. Voor de vorm van het phreatisch oppervlak wordt afgeleid in de notatie van Campus:

1) F. Campus. Mouvement de filtration en régime variable. "Comptes rendus" du 2me Congrès national des Sciences. Bruxelles 19-23 juin 1935.

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_0^2}{2l^3} (l-x)^2 (2l+x)}.$$

Bij het overbrengen in onze notaties worden de volgende substituties toegepast: h_1 wordt vervangen door D .

h wordt vervangen door $D + \varphi$ (φ is in onze notaties negatief), $h_1^2 - h_0^2 = (h_1 + h_0)(h_1 - h_0)$ wordt vervangen door $-2\varphi_0 D$, l wordt vervangen door $2\sqrt{2} t$ volgens (1); tevens wordt $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ vervangen door u .

De vergelijking kan dan geschreven worden als:

$$D\varphi = \sqrt{D^2 + \frac{2\varphi_0 D}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2}-u)^2 (2\sqrt{2}+u)}.$$

Quadrateert men beide leden, dan vindt men, nadat de termen D^2 tegen elkaar weggeschraapt zijn:

$$2\varphi D + \varphi^2 = \frac{2\varphi_0 D}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2}-u)^2 (2\sqrt{2}+u).$$

Aangezien φ klein is tegenover $2D$, is φ^2 klein tegenover $2\varphi D$, zoodat de term φ^2 geschrapt mag worden. Na vereenvoudiging vindt men:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\sqrt{2}-u)^2 (2\sqrt{2}+u),$$

wat vergeleken moet worden met onze uitkomst:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - E(u).$$

Voor enkele waarden van u zijn de uitkomsten van beide formules in onderstaande tabel vergeleken:

u	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$ Campus	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$ exact bij de gestelde premissen
0,1	0,890	0,8875
0,3	0,685	0,6714
0,5	0,491	0,4795
0,7	0,318	0,3222
0,9	0,174	0,2031
1,1	0,0684	0,1198
1,3	0,00950	0,0660
1,41	0	0,0470

Zet men de gevonden waarden grafisch uit, dan blijkt ook de formule van Campus een goede benadering te zijn.

Voor de evenwijdige toestrooming op het kanaal wordt verder nog een formule afgeleid, die de hoeveelheid water, die op het kanaal toestroomt, geeft als functie van den tijd. In de notaties van Campus luidt deze:

$$q_0 = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\varphi H v}{l}} (h_1 - h_0).$$

In onze notaties met de vorenbesproken substituties wordt dit:

$$\frac{q_0}{\varphi_0} = -\frac{3}{8} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{E}} = -\frac{0,530}{\sqrt{E}}.$$

Deze uitkomst kan worden vergeleken met de door ons gevonden verg. (7) van par. 3, luidende:

$$\frac{q_0}{\varphi_0} = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} = - \frac{0,564}{\sqrt{t}}$$

Ook hier kan men van een goede benadering spreken.

Tenslotte worden door Campus eenige uitkomsten gegeven voor de afpomping van een put met constante wateronttrekking Q_0 . Het verband tusschen l en T luidt hier in de notaties van Campus:

$$t = \frac{0,3 \pi l^2}{H \varphi}$$

en in onze notaties:

(1)

$$l = \sqrt{\frac{2}{0,3}} \sqrt{t}$$

l wordt dus bepaald door een waarde van $u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{0,3}} = 1,29$.

Voor de peildaling in den put als functie van den tijd wordt afgeleid in de notaties van Campus:

$$Q = \frac{\pi \varphi (h_1^2 - h_0^2)}{\ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{4}}$$

Na invoering van de bovengenoemde substituties wordt dit in onze notaties, wanneer tevens de waarde van l uit (1) ingevoerd wordt:

$$\frac{\varphi}{q_0} = \lg u - \lg \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{0,3}} + \frac{1}{3}$$

ofwel:

$$\frac{\varphi}{q_0} = \lg u + 0,07563$$

Deze uitkomst moet worden vergeleken met onze formule (18) van par. 10, luidende:

$$\frac{\varphi}{q_0} = \lg u + 0,2887$$

Ook dit is een goede benadering.

TWEEDE GROEP VRAAGSTUKKEN
(Methode van de zeshoekjes)

Grondwater met phreatisch oppervlak.

par. 19. Probleemstelling.

Fig. 14a stelt den plattegrond, fig. 14b een verticale doorsnede over een

terrein voor. Het terreingedeelte, dat in beschouwing zal worden genomen, wordt rondom begrensd door een kanaal, dat door stuwen bij A en B in twee panden verdeeld is. In de berekening zal worden aangenomen, dat de waterspiegel in deze panden (het mogener ook drie of meer zijn) kunstmatig op een constant peil onderhouden wordt. In het terrein zal zich nu een grondwaterstroom ontwikkelen van het hoge pand naar het lage. Er wordt verondersteld, dat zich ter plaatse goed doorlatende grond bevindt, waarin het water een vrij phreatisch niveau kan vormen, en dat deze aan de onderzijde begrensd wordt door een laag CD, die niet geheel doorlatend is, maar toch een grooten weerstand biedt tegen doorstroomend grondwater. Zou deze

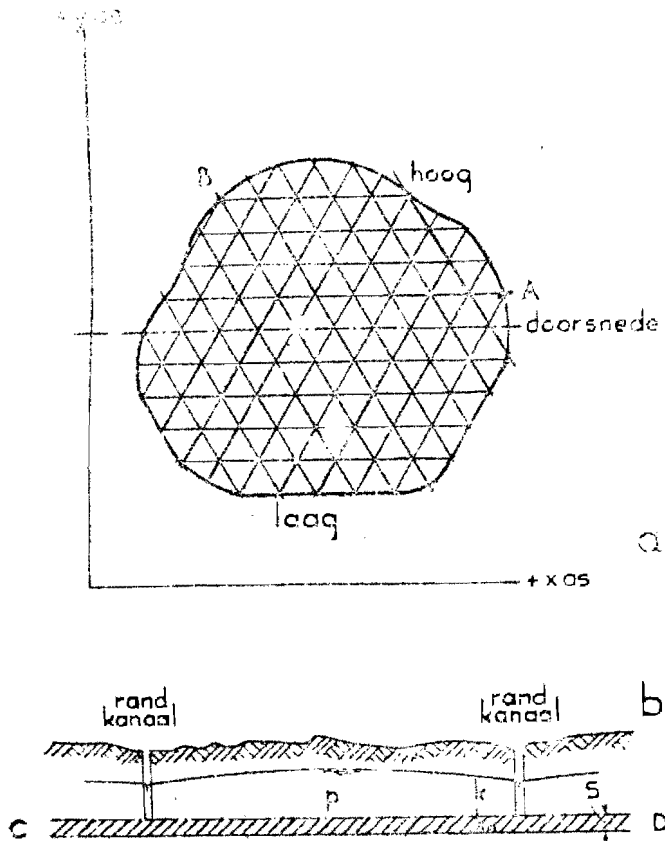


Fig. 14. Net van zeshoekjes.

laag geheel ondoorlatend zijn, dan zou er alleen een grondwaterstrooming plaats vinden van het hoge naar het lage pand, en zou het phreatisch oppervlak nergens hoger liggen dan het niveau van het hoogste pand, en nergens lager dan het niveau van het laagste pand. Heeft er echter bovendien een strooming door de laag CD plaats en neemt men aan, dat die over het geheele terrein benedenwaarts gericht is, dan zal het phreatisch oppervlak niet langer een geleidelijke overgang vormen tusschen het peil van het hoge pand en het lage, maar zal het een hollen vorm aannemen. Neemt men verder aan, dat op het terrein regen valt, die in den grond dringt, en den grondwaterstroom voedt, dan kan deze het waterverlies, dat ontstaat door de infiltratie door de laag CD min of meer compenseeren of zelfs overtreffen. In het laatste geval krijgt het phreatisch oppervlak een bollen vorm.

Het probleem wordt nu als volgt gesteld: Een goed doorlatende grondlaag wordt rondom begrensd door een randkanaal van willekeurigen vorm, waarin verschillende bekende peilen heerschen. De doorlatende grondlaag is aan de onderzijde begrensd door een laag met een bekende, geringe doorlatendheid, terwijl onder deze laag een

willekeurig over het terrein verdeelde, bekende drukverdeling heerscht. Op het terrein valt neerslag, die voor een bekend gedeelte in den grond dringt, en dan grondwaterstroom voedt. Wordt gevraagd den vorm van het phreatisch oppervlak te bepalen.

Een uitbreiding kan nog aan het vraagstuk gegeven worden, door te veronderstellen, dat zich binnen het randkanaal kanaalgedeelten of meertjes bevinden van willekeurigen vorm, waarin de waterstand op een gegeven peil onderhouden wordt. Deze open wateren behoeven niet met elkaar en niet met het randkanaal in verbinding te staan.

Natuurlijk hangt de druk onder de scheidende laag samen met den vorm van het phreatisch oppervlak, en feitelijk zou deze druk, evenals de ligging van het phreatisch oppervlak, als onbekende berekend moeten worden. Het vraagstuk zou dan niet meer te hanteeren zijn.

Wanneer nu de scheidende laag zoo sterk afsluitend is, dat de druk er onder, de strooming er boven maar weinig beïnvloedt, kan men volstaan met een vooraf gemaakte schatting voor het verloop van den druk onder de scheidende laag. Volgens een methode, die hierna zal worden behandeld, is het mogelijk het verloop van den druk onder de scheidende laag te berekenen, als de vorm van het phreatisch oppervlak gegeven is. Men is dus in principe in staat het aangenomen verloop van den druk onder de scheidende laag na afloop van de berekening te verifieeren, wat echter, in geval van een sterk scheidende werking van die laag, in den regel niet noodig zal zijn.

Bij grootere doorlatendheid zal dit verifieeren echter wel noodig zijn en kan zelfs een herhaling van de berekening van het phreatisch oppervlak met de nieuw gevonden waarden voor den druk onder de scheidende laag noodig zijn.

Ten slotte is het mogelijk, beide grootheden te bepalen, door ze om beurten eenige malen te berekenen.

Wanneer men het vraagstuk langs exacten, analytischen weg zou willen oplossen, zou men twee horizontale assen aanbrengen, de x as en de y as. Stelt men de hoogteligging van het phreatisch oppervlak ten opzichte van den bovenkant van de laag CD voor door de letter p , dan zou moeten gelden:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0,$$

voor het geval, dat er noch infiltratie door de laag CD, noch nuttige neerslag was, voor het geval dus dat de grondwaterstrooming onderweg noch water ontving noch verloor.

Is dit laatste wel het geval, dan komen in het rechterlid twee termen te staan, de ééne $\frac{N}{kD}$, die het gevolg is van den nuttigen neerslag en de andere $\frac{k_0}{\epsilon} \frac{(p - \varphi)}{kD}$, die het gevolg is van de infiltratie door de laag CD, zoodat de differentiaalvergelijking wordt:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{N}{kD} - \frac{k_0}{\epsilon} \frac{(p - \varphi)}{kD}.$$

Hierin is: N = de nuttige neerslag in m/dag,

k = de doorlaatcoëfficiënt van den doorlatenden grond in m/dag,

D = de gemiddelde dikte van het watervoerende gedeelte van de doorlatende laag in meters,

k_0 en ϵ respectievelijk de doorlaatcoëfficiënt en de dikte van de laag CD (in m/dag en m),

p = de hoogteligging van het phreatische vlak en

φ = de stijghoogte van het water onder de scheidende laag, beide in meters t.o.v. den bovenkant van de scheidende laag.

x en y worden ten slotte in meters uitgedrukt.

Bij de afleiding van deze vergelijking, welke afleiding als bekend mag worden verondersteld, zijn twee premissen gemaakt.

1) In de watervoerende laag zijn potentiaalveranderingen langs een verticale lijn buiten beschouwing gelaten. De strooming wordt dus beschouwd als tweedimensionaal (dimensies: x en y). Aan deze veronderstelling wordt des te nauwkeuriger voldaan, naarmate de lengte- en breedteafmetingen van de laag grooter zijn ten opzichte van de dikte, naarmate de geheele laag dus een meer gerekten vorm heeft.

2) Voor de dikte van het watervoerende gedeelte van de doorlatende laag is de constante, gemiddelde waarde D ingevoerd. Feitelijk is deze dikte van plaats tot plaats verschillend en gelijk aan p . De differentiaalvergelijking krijgt, wanneer men dit in rekening brengt, een andere, minder eenvoudigen vorm, die integratie onmogelijk maakt, en die hier buiten beschouwing zal blijven. De afleiding levert echter geen moeilijkheden op.

Een exacte, analytische oplossing van het probleem zou hierin bestaan, dat de differentiaalvergelijking geïntegreerd werd met als randvoorwaarde, de gegeven waarde van p langs het randkanaal. De uitkomst zou p geven als functie van x en y . Het spreekt vanzelf, dat een dergelijke oplossing alleen mogelijk is, als alle gegevens van analytischen aard zijn. De vorm van het randkanaal moet een cirkel of een ellips of een dergelijke regelmatige vorm zijn; de druk onder de scheidende laag moet volgens een gegeven regelmatige functie verlopen. Zelfs bij dergelijke gegevens is de oplossing in den regel heel moeilijk of niet te vinden.

In het navolgende zal echter verondersteld worden, dat de gegeven grootheden meer onregelmatig zullen zijn, de oplossing zal dan ook langs een anderen weg gezocht worden.

Over het terrein wordt een net van punten gelegd, zooals is aangegeven in fig 14a, en de opgave zal zijn in ieder punt van dit net de waarde van p te berekenen. Voor de stroomingsverschijnselen tusschen de punten zal aangenomen worden, dat de afstanden van de punten onderling zeer klein zijn. De af te leiden formules zullen pas streng gelden, als de mazen van het net tot nul naderen. Bij de toepassing op rekenvoorbeelden zal de afstand a , dat is de afstand van punt tot punt zeer klein zijn, maar een, hoewel niet groote, toch eindige waarde hebben. Daardoor zal de berekende waarde van p van de werkelijke afwijken, zoodat men moet spreken van een benaderingsmethode. De fouten, die hierdoor ontstaan, zijn eigen aan de methode, en moeten met de methode aanvaard worden. Men kan de fouten beperken, door de mazen van het net fijner te nemen, wat echter meer werk met zich meebrengt. Voorwaarde voor de toepassing is, dat het phreatisch oppervlak gelijkmatig gebogen is. Zoo mogen in het terrein b.v. geen puttenbemalingen voorkomen, omdat deze in de buurt van den put te groote onregelmatigheden geven. Ook is de toestand nabij de punten A en B niet geheel zonder bedenking. Men kan aan dit laatste bezwaar echter tegemoet komen, door de punten A en B met punten van het net te doen samenvallen, en hierin voor p een waarde aan te nemen, die overeenkomt met het gemiddelde van de twee niveau's.

Voor het net is een aaneenschakeling van gelijkzijdige driehoeken gekozen. Er is een tweede mogelijkheid, n.l. een aaneenschakeling van vierkanten. Om twee redenen is echter aan den eersten vorm de voorkeur gegeven: in de eerste plaats omdat bij het gekozen systeem ieder punt omgeven is door zes naburige punten, die alle op denzelfden afstand van het beschouwde punt zijn gelegen, terwijl bij het vierkantennet ieder punt acht naburige punten heeft, die vier aan vier op verschillende afstanden liggen, in de tweede plaats biedt een driehoekensysteem meer mogelijkheden om de randpunten met een kanaal van willekeurigen plattegrond te doen samenvallen, omdat de punten hier in drie richtingen op rechte rijen liggen, en in het andere systeem maar in twee richtingen.

Het in n.l. de bedosling, het randkanaal te benaderen door een veelhoek, waarvan de z.g. randpunten de hoekpunten zijn. In deze punten is p uiteraard bekend. De punten, die hierbinnen liggen, worden veldpunten genoemd. Hierin is p onbekend, zoodat het aantal onbekenden even groot is als het aantal veldpunten. Er moeten nu evenveel vergelijkingen zijn om de onbekenden vast te leggen. Deze worden geleverd door een formule, die in de plaats treedt van de hierbovengenoemde differentiaalvergelijking, en die daarom ook differentiaalvergelijking genoemd zal worden. Deze zal in de volgende par. afgeleid worden, maar hierop vooruitlopende kan gezegd worden, dat de vergelijking het verband aangeeft tusschen de waarde van p in een bepaald punt en de waarde van p in de zes naburige punten. Schrijft men nu voor ieder veldpunt als middelpunt de differentiaalvergelijking op, dan krijgt men evenveel vergelijkingen als er veldpunten zijn, d.w.z. evenveel als er onbekenden zijn. De onbekenden zijn hiermee dus in principe te bepalen.

In par. 21 zal een methode besproken worden, die in staat stelt dit groote aantal (lineaire) vergelijkingen op te lossen.

par. 20. Afleiding van de differentiaalvergelijking.

Stationnaire toestand met constant profiel.

In fig. 15 is een punt M van het net geteekend, omgeven door de zes naburige punten A, B, C, D, E en F. Tevens is de zeshoek geteekend, die gevormd wordt door de middelloodlijnen op MA, MB, MC enz. De zijde van dezen zeshoek is $k = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$, het oppervlak ervan wordt voorgesteld door opp_z en is gelijk aan $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$. De zeshoek vormt den plattegrond van een prisma, dat doorstroomd wordt door den grondwaterstroom, die ter plaatse de richting van de pijlen heeft. Wil men voor ieder van de zes zijvlakken de hoeveelheid water berekenen, die er doorvloeit, dan vindt men deze als het product van het oppervlak van het zijvlak met de snelheidscomponente van het water loodrecht op het vlak.

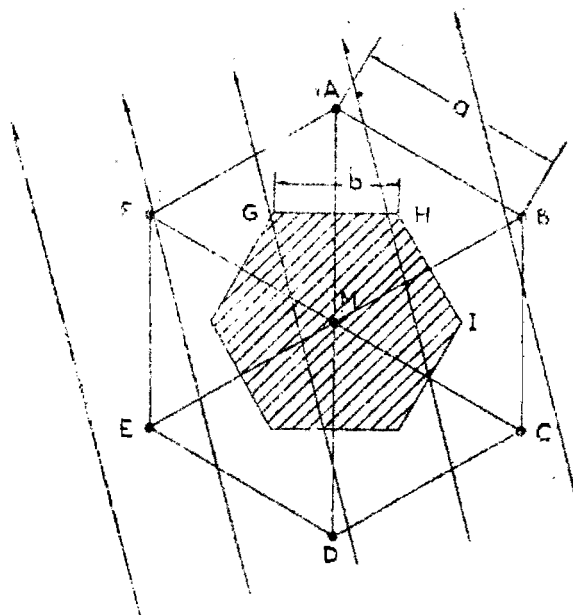


Fig. 15. Elementair zeshoekje.

Het oppervlak van het zijvlak GH is Db. Hierbij wordt voorloopig de hoogte van het doorstroomde profiel gelijk gesteld aan de constante D. Het verhang loodrecht op het vlak gemeten is $\frac{P_M - P_A}{a}$. Dit is exact als a oneindig klein is. Bij eindige waarde van a verloopt het phreatisch oppervlak tusschen M en A volgens een kromme, die hier dus door de koorde vervangen wordt.

De hoeveelheid water die per tijdseenheid door de zijde GH stroomt, is volgens Darcy

$$Q_A = k D b \frac{P_M - P_A}{a}$$

Door de zijde HI stroomt:

$$Q_B = k D b \frac{P_M - P_B}{a}$$

Zoo kan men voor ieder zijde van den gearceerden zeshoek de hoeveelheid water berekenen, die er doorstroomt. Sommeert men deze, dan vindt men:

$$Q_{tot} = \sum Q_A = k D b \frac{6 P_M - \sum P_A}{a}$$

Hicrinstelt $\sum Q_A$ voor: $Q_A + Q_B + Q_C + Q_D + Q_E + Q_F$ en $\sum P_A$: $P_A + P_B + P_C + P_D + P_E + P_F$.

Q_{tot} stelt de totale hoeveelheid water voor, die per tijdseenheid den gearceerden zeshoek verlaat door de zijwanden. Veronderstelt men een stationnaire toestand, dan moet deze hoeveelheid aangevuld worden door den regen, verminderd met de infiltratie door de scheidende laag. De hoeveelheid water die per tijdseenheid in het gearceerde gebied komt door regen is:

$$N + P - P_2$$

waarin N = de nuttige neerslag in m/dag. De infiltratie door de scheidende laag bedraagt:

$$\frac{k_s}{s} \sigma p_E (\varphi_M - \psi_M).$$

De continuïteitsvoorwaarde luidt nu:

$$k_D b \frac{\varphi_M - \sum p_A}{a} = N \sigma p_E - \frac{k_s}{s} \sigma p_E (\varphi_M - \psi_M).$$

Men kan hieruit φ_M oplossen. Drukt men bovendien b en σp_E in a uit, dan vindt men:

$$\varphi_M = \frac{\sum p_A + \frac{3a^2 N}{2k_D} + \frac{3}{2} \frac{k_s}{s} \frac{a^2}{k_D} \psi_M}{b + \frac{3}{2} \frac{k_s}{s} \frac{a^2}{k_D}}, \quad 1)$$

of

$$\varphi_M = \frac{\sum p_A + A + B \psi_M}{C},$$

waarin $C = b + B$. Dit is de vroeger genoemde differentiaalvergelijking, die dus een lineair verband geeft tusschen de potentiaal in M en in de omliggende punten.

Voor het bijzondere geval, dat de scheidende laag geheel ondoorlatend is, is $\frac{k_s}{s} = 0$, dus $B = 0$.

De differentiaalvergelijking wordt dan:

$$\varphi_M = \frac{\sum p_A + A}{b}$$

Ontbreekt bovendien de regen, dan is

$$\varphi_M = \frac{\sum p_A}{b},$$

d.w.z. de potentiaal in M heeft de gemiddelde waarde van die in de omliggende punten. In dit geval komen in de differentiaalvergelijking geen doorlaatconstanten voor.

Zoals bij de afleiding gezegd is, geldt de uitkomst exact als a oneindig klein is. Het is daarom goed, voor eendige waarde van a de uitkomst te vergelijken met die van een exacte berekening in een geval, waarin een exacte oplossing mogelijk is. Hiervoor wordt genomen een gebied, omgeven door een cirkelvormig kanaal met straal R en peil $p = 0$, waarbinnen een nuttige neerslag N valt, terwijl de scheidende laag uit volkomen ondoorlatend materiaal bestaat. Men vindt dan voor de hoogteligging van het phreatisch vlak op afstand x van het midden van den cirkel:

$$p = \frac{N}{4k_D} (R^2 - x^2).$$

en in het middelpunt van den cirkel:

$$p = \frac{N}{4k_D} R^2.$$

Men kan dit geval vergelijken met het bovenbesprokene door te stellen:

$$p_A = p_B = p_C = p_D = p_E = p_F = 0 \quad \text{en} \quad \frac{k_s}{s} = 0,$$

waarmee de uitkomst overgaat in:

$$p_M = \frac{N}{4k_D} a^2.$$

Er bestaat dus in dit geval een volkomen overeenstemming tusschen de benaderende en de exacte methode, wanneer de zeshoek wordt vervangen door den omschreven cirkel.

1) In deze vergelijking treedt de grootheid $\frac{k_s}{s} \frac{1}{k_D}$ op, die gewoonlijk wordt voorgesteld door $\frac{1}{\lambda^2}$.

Veranderlijk doorstroomprofiel.

Voor de hoeveelheid water, die per tijdseenheid door de zijde GH stroomt, is zoo juist genoemd:

$$Q_A = k D b \frac{p_M - p_A}{a}$$

Feitelijk is het doorstroomprofiel niet constant en gelijk aan D, maar is het op iedere plaats gelijk aan p. Voor de waarde van p ter plaatse van het vlak GH wordt nu gesteld $\frac{p_M + p_A}{2}$, d.w.z. het gemiddelde van de waarden van p in M en in A. De vergelijking wordt dan:

$$Q_A = k \frac{p_M + p_A}{2} b \frac{p_M - p_A}{a}$$

Voor $(p_M + p_A)(p_M - p_A)$ kan men schrijven $p_M^2 - p_A^2$,

zoodat

$$Q_A = \frac{k b}{2a} (p_M^2 - p_A^2)$$

Voor de zes zijden samen is

$$Q_{A+B} = \sum Q_A = \frac{k b}{2a} (6 p_M^2 - \sum p_A^2)$$

Veronderstelt men verder, dat er wel regen is, maar dat de scheidende laag geheel ondoorlatend is, dan is wegens continuïteit

$$\frac{k b}{2a} (6 p_M^2 - \sum p_A^2) = N o p p_b$$

Hieruit kan men p_M oplossen. Drukt men bovendien b en opp_b in a uit, dan is de uitkomst:

$$p_M^2 = \frac{\sum p_A^2 + \frac{3 N a^2}{k}}{6}$$

of

$$p_M^2 = \frac{\sum p_A^2 + E}{6}$$

Wanneer het doorstroomprofiel veranderlijk is, en er bovendien infiltratie door de scheidende laag plaats heeft, wordt de vergelijking:

$$\frac{k b}{2} (6 p_M^2 - \sum p_A^2) = N o p p_b - \frac{k_2}{3} o p p_b (p_M - \varphi_M)$$

Wil men p_M kennen, dan moet men een vierkantsvergelijking oplossen. Dit veroorzaakt echter te veel werk, dan dat men op dit geval de hierna te bespreken methode zou kunnen toepassen.

Meestal zal men echter kunnen volstaan met de infiltratie van punt tot punt te berekenen uit de vooraf geschatte waarden van p_M , en deze op den regen in mindering te brengen. Naderhand kan men dan controleeren, of de aanvankelijke schatting voldoende nauwkeurig is geweest, en zoo noodig de berekening herhalen.

Niet-stationnaire toestand.

Ook voor niet-stationnaire bewegingen kan de berekeningsmethode toegepast worden. De opgave is dan, van tijdstip tot tijdstip den vorm van het phreatisch oppervlak te leeren kennen. De tijdstippen liggen hierbij een tijdruimte Δt van elkaar verwijderd, waarbij Δt bij het afleiden van de differentiaalvergelijking zeer klein zal worden gedacht, terwijl in de werkelijkheid aan Δt een weliswaar kleine, maar toch eindige waarde gegeven zal worden. De fouten, die hieruit voortvloeien, behoren evenals de vroeger besprokene tot het wezen van de methode, en moeten aanvaard worden. Ze kunnen kleiner gemaakt worden door Δt kleiner te maken.

Bij een niet-stationnaire beweging is het heele phreatisch oppervlak in beweging, en het vervormt daarbij op grillige wijze. Voor ieder tijdvak Δt is een volledige berekening noodig om in ieder punt van het net de waarde te vinden die de potentiaal aan het einde van het tijdvak heeft. De berekening is dus erg om-

slachtig en zal in het algemeen geen toepassing vinden. Alleen als men aan de uitkomst zeer groote waarde hecht, zal men de berekening uitvoeren. Volledigheids-halve zullen de formules hier echter afgeleid worden.

De potentialen aan het begin van een willekeurig tijdvak zullen genoemd worden $P_M, P_A, P_B, P_C, \dots$ enz., die aan het einde van het tijdvak $p_M, p_A, p_B, p_C, \dots$ enz. (zie fig. 15). Het verhang tusschen M en A is aan het begin van het tijdvak $\frac{P_M - P_A}{a}$, aan het eind $\frac{p_M - p_A}{a}$. De hoeveelheid water, die in het tijdvak Δt door de doorsnede GH stroomt, wordt evenredig gesteld met $p'_M - p'_A$, waarin p'_M de gemiddelde waarde tusschen P_M en p_M voorstelt en p'_A de gemiddelde waarde tusschen P_A en p_A , dus $p' = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} p$. Bij de limietwaarde van Δt is dit exact, bij eindige waarde van Δt kan het als een benadering gelden. Over de fouten, die hierbij ontstaan is hiervoor al gesproken.

Op dezelfde wijze wordt de hoeveelheid water, die door de scheidende laag infiltreert, evenredig gesteld aan $p'_M - \varphi'_M$. Verondersteld wordt, dat de scheidende laag zoo sterk afsluitend is, dat de invloed van φ niet groot is, en men kan volstaan met een schatting van φ buiten de berekening om. Men is hierbij vrij, φ met het verloop van den tijd geleidelijk te laten veranderen, dan wel als onveranderlijk aan te nemen. Bij de afleiding van de formules zal worden aangenomen, dat φ met den tijd verandert. De gemiddelde waarde in het tijdvak Δt zal φ' genoemd worden.

De afleiding van de differentiaalvergelijking geschiedt op dezelfde wijze als bij de stationnaire gevallen. Voor de continuïteitsvoorwaarde vindt men:

$$\frac{kD\delta}{a} (b p'_M - \sum p'_A) = \mu opp_b \frac{P_M - p_M}{\Delta t} + N opp_b - \frac{k_0}{S} opp_b (p'_M - \varphi'_M).$$

Het linker lid van de vergelijking stelt de hoeveelheid water voor, die per tijdseenheid door de zes zijvlakken van het prisma wegvloeit. De eerste term van het rechter lid stelt de hoeveelheid water voor, die per tijdseenheid vrijkomt door het dalen van het phreatisch oppervlak (eventueel geborgen wordt bij rijzing van dat vlak); de tweede en derde term komen overeen met den nuttigen neerslag en de infiltratie door de scheidende laag.

Men kan in deze vergelijking p'_M vervangen door $\frac{1}{2} P_M - \frac{1}{2} p_M$,

$$\sum p'_A \text{ door } \frac{1}{2} \sum P_A + \frac{1}{2} \sum p_A.$$

Brengt men p_M naar het linker lid en substitueert men de waarden van b en opp_b , dan vindt men

$$p_M = \frac{\sum p_A + A P_M + \sum P_A + B \varphi'_M + C}{D}$$

Hierin is

$$A = \frac{\mu a^2}{2 \Delta t} - kD - \frac{k_0 a^2}{S \cdot 4},$$

$$B = \frac{k_0}{S} \frac{3a^2}{kD},$$

$$C = \frac{3a^2 N}{kD},$$

$$D = \frac{a k D}{2} \left(\frac{\mu a^2}{2 \Delta t} + kD + \frac{k_0 a^2}{S} \right).$$

par. 21. De Methode.

Bij het oplossen van het probleem gaat men als volgt te werk: Op een vel teekenpapier wordt het puntennet met inkt geteekend. De schaal moet zoo groot zijn, dat men de ruimte heeft om bij ieder punt verscheidene getallen te schrijven. Bepalen wij ons vooreerst tot het eenvoudigste geval: den stationnairen toestand met constant doorstroomprofiel, dan luidt de differentiaalvergelijking:

$$p_M = \frac{\sum p_A + A + B \varphi_M}{C}$$

Hierin zijn A, B, C en φ_M bekend, p_M en p_A , p_B , p_C enz. onbekend. Men begint met voor ieder punt de waarde van $A + B \varphi_M$ te berekenen, en deze met roodeinkt bij de punten te schrijven, bijvoorbeeld boven de punten. Daarna tracht men zich zoo goed mogelijk voor te stellen, hoe de uitkomst er uit zal zien, dat wil zeggen, men bepaalt schattenderwijs de waarde van p in ieder punt, en schrijft deze waarden met potlood bij de punten, bijvoorbeeld aan de linkerzijde. De ingeschreven waarden zijn natuurlijk onjuist. Men kan zich hiervan overtuigen door voor ieder punt als middelpunt p_M te berekenen uit de waarden van p in de zes omringende punten. Men kan aldus voor ieder punt de correctie berekenen, die men op de geschatte waarde voor p_M moet aanbrengen om in overeenstemming te komen met de zes omringende punten. Deze waarden schrijft men in potlood aan de rechterzijde van de punten. Uitdrukkelijk zij vermeld, dat men de correcties wel berekent en bijschrijft, maar nog niet aanbrengt. In ieder punt wordt de correctie dus berekend uit de zes oorspronkelijk geschatte waarden van de omliggende punten.

Men zoekt nu een punt uit met een groote correctie, Laat dit het punt M zijn

in fig. 16a. De correctie is hier + 9. Men voegt deze correctie bij de geschatte potentiaal, d.w.z. men voegt het cijfer 78 weg, en zet hiervoor in de plaats 87 (= 78 + 9). De cijfers

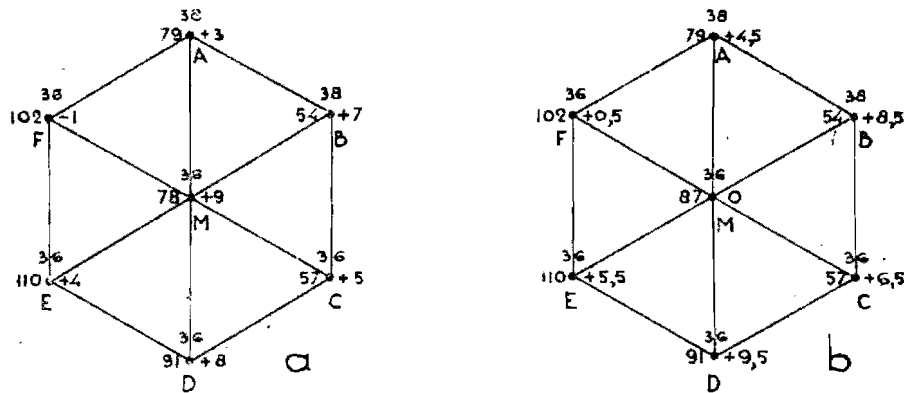


Fig. 16. De methode van vereffening.

rechts van de punten duiden correcties aan, die nog aangebracht moeten worden. De correctie van 9 is aangebracht, dus het cijfer 9 kan weggeveegd worden door nul vervangen (zie fig. 16b).

Hiermee mag men echter niet volstaan. Toen de correctie in A berekend werd, stond bij M : 78. Nu staat er 87, d.i. 9 meer. Zou men de correctie voor A nu berekenen, dan zou men voor de correctie niet 3 vinden, maar $3 + \frac{9}{6}$ (men zie de differentiaalvergelijking). Men moet dus de correctie in A met $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$ vermeerderen. Men voegt de 3 weg en zet hiervoor in de plaats 4.5. Op dezelfde wijze moeten de correcties in B, C, D, E en F met 1.5 vermeerderd worden. Het resultaat geeft fig. 16b.

Men zoekt nu een ander punt uit met een groote correctie en herhaalt hier de bewerking. Zoo gaat men verder, en het zal daarbij blijken, dat de aan te brengen correcties steeds kleiner worden, tot ze op het laatst zoo klein worden, dat voortzetten van de bewerking geen zin heeft. Het probleem is dan opgelost binnen de grenzen van nauwkeurigheid, die men stelt.

In de randpunten heeft de potentiaal van meet af de goede waarde. Hier behoeven dus nooit correcties aangebracht te worden. Zouden in fig. 16, A en B randpunten zijn, dan zouden alleen in C, D, E en F correcties aangebracht behoeven te worden, groot + 1.5.

Men kan gemakkelijk inzien, dat de correcties in ieder punt steeds kleiner

worden, en tot nul naderen. Iederen keer verdwijnt in het punt M een correctie Δp , terwijl in de omringende punten zes correcties, ieder groot $\frac{\Delta p}{C}$ ontstaan. Omdat $C = 6 + B$, groter is dan 6, zal het totaal van de correcties daardoor verminderen. Meestal is C echter maar weinig groter dan 6, en in het geval van een ondoorlatende kleilaag zelfs gelijk aan 6. Door dezen invloed vermindert de som van alle correcties dus of zeer langzaam, of niet. Grenzen aan het punt M echter één of meer randpunten, dan worden hierbij geen nieuwe correcties bijgeschreven. In dit geval neemt de som van de correcties dus wel merkbaar af. Wat hier gezegd is, geldt voor de som van de absolute waarden van de correcties. De methode geeft dus een waarborg, dat de som van de absolute waarden van de correcties steeds kleiner wordt. Het zou kunnen zijn, dat tenslotte een limietwaarde werd bereikt, die van nul verschilt. Dit is echter niet mogelijk. Hierbij zouden n.l. alle punten A in fig. 17, waaraan randpunten grenzen, tenslotte een correctie nul moeten krijgen, want anders zou bij de eerstvolgende vereffening in één van die punten, de som van de correcties nog merkbaar omlaag gebracht kunnen worden. De punten B echter, waaraan punten A grenzen, zouden ook een correctie nul moeten hebben, omdat anders na het vereffenen in een punt B, en daarna in de aangrenzende punten A de som van de correcties zou dalen. Zoo voortgaande kan men aantoonen, dat in ieder punt afzonderlijk de correctie tenslotte nul moet worden, en daarmee de som der correcties.

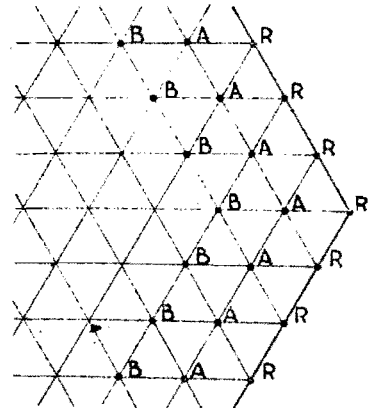


Fig. 17. Rand van het veld.

Hiermee is bewezen, dat de methode steeds tot het doel voert. Voor de praktijk is het van groot belang of dit snel of langzaam gebeurt. Zeer gunstige toestanden ontstaan, als positieve en negatieve correcties elkaar afwisselen. Als in M een positieve correctie vereffend wordt, ontstaan positieve correcties in de punten A, B, C, enz. Als in A nu een negatieve correctie genoteerd stond, valt deze geheel of gedeeltelijk weg tegen de nieuwe. De som van de absolute waarden van de correcties vermindert hierdoor. Het ongunstigst is het, als de correcties overwegend positief of negatief zijn. In dat geval heeft men het heele phreatische oppervlak te laag of te hoog aangenomen. Als de correcties groot zijn, doet men het beste opnieuw te beginnen met andere geschatte waarden.

Voorts zal men in het algemeen in een punt M niet precies de waarde van de correctie vereffenen. In het gegeven voorbeeld van fig. 16 zal men niet een correctie van + 9 aanbrengen, maar bijv. van + 12 of + 15. Bij M blijft dan een nog te corrigeren bedrag van - 3 of - 6 staan. De punten A, B, C enz. vertoonenn.l. overwegend positieve correcties Δp . Worden deze punten straks vereffend, dan ontstaan hierdoor positieve correcties in M. De som van deze zes correcties is:

$$\Delta p_M = \frac{\sum \Delta p_A}{C}$$

Aangezien C ongeveer = 6 is, is Δp_M ongeveer het gemiddelde van de correcties in de omliggende punten, d.i. ruim 4. De negatieve correctie, die bij het vereffenen van M bij dit punt ontstaan was, valt hier gedeeltelijk tegen weg. Zijn de punten A, B, C enz. aan de buitenzijde weer begrensd door punten met hoofdzakelijk positieve correcties, dan zal men de punten A, B, C enz. op hun beurt weer te sterk corrigeren, wat nog weer extra positieve correcties in M geeft. Het is goed, als men de aanvankelijke correctie van M zoo groot gekozen heeft, dat ook de laatstgenoemde bedragen wegvallen. Het heeft geen zin tijdens het vereffenen hiernaar nauwkeurige berekeningen op te stellen. In het algemeen kan men zeggen, dat men punten, die omgeven zijn door punten met correcties met hetzelfde teken

flink wat te sterk corrigeren moet. Het vereffenen gaat hierdoor sneller. De grootte van de correctie kan men schattenderwijze bepalen. Bovendien is het wenschelijk steeds veelvouden van C aan te brengen. Men voorkomt daardoor het telkens afronden, wat de nauwkeurigheid ten goede komt.

Tenslotte kan men de vraag stellen, tot hoever men de berekening voort moet zetten. Om deze vraag te beantwoorden moet men zich afvragen wat de fysieke betekenis is van een nog niet vereffend correctiebedrag. Dit zou nul worden, als in het beschouwde punt toevallig $A + B\varphi$ dit bedrag groter zou zijn. Ieder willekeurig phreatisch oppervlak stelt dus den stationnairen grondwaterspiegel voor, overeenkomende met een grillig over het terrein verdeelden regenval (de grootheid A is evenredig met den nuttigen neerslag). Nu is de nuttige neerslag op een terrein nooit nauwkeurig bekend. Heeft men in een bepaald geval aan de berekening $N = 400$ mm/jaar ten grondslag gelegd, dan kan men b.v. vaststellen, dat men de vereffening staakt, als een toestand verkregen is, overeenkomende met een nuttigen neerslag, die nergens groter is dan 420 mm, en nergens kleiner dan 380 mm/jaar. Men kan dan met behulp van de differentiaalvergelijking gemakkelijk uitrekenen, welke positieve en negatieve correcties men maximaal onvereffend mag laten. Bij uitgewerkte voorbeelden bleek het, dat, om aan een dergelijken maatstaf te voldoen, de potentialen zeker tot in mm berekend moesten worden, terwijl men, op praktische gronden deze grootheden niet verder dan in cm nauwkeurig zou willen kennen. Toch mag men de berekening niet eerder staken, omdat meerdere correcties, ieder kleiner dan 1 cm, een totaal kunnen opleveren van eenige cm.

Als de hoogte van het profiel niet op de constante waarde D wordt aangenomen, maar veranderlijk gedacht wordt, gelijk aan p, wordt de differentiaalvergelijking, zooals in de vorige par. is afgeleid:

$$p_M^2 = \frac{\sum P_A^2 + E}{L}$$

Ook hier neemt men schattenderwijze waarden voor p aan, maar schrijft inplaats van de waarden van p zelf, die van p^2 aan de linkerzijde van de punten. De vereffening geschiedt op dezelfde wijze als bij het bovenbesproken geval, met dit verschil, dat men hier correcties voor p^2 berekent, en die vereffent. Aangezien E een maat is voor den regenval kan men, aan de hand van de variaties, die men in den regen wil toelaten, ook hier bepalen, hoever men de berekening wil voortzetten. Aan het eind van de berekening vindt men door worteltrekking voor ieder punt van het net de waarde van p.

Bij niet-stationnaire beweging is

$$P_M = \frac{\sum P_A + A P_M + \sum P_A + B \varphi_M + C}{D}$$

Men moet hier voor ieder tijdvak Δt een volledige vereffening uitvoeren. Aan den eenen kant zal men hier snel kunnen werken, omdat men aan de hand van de uitkomsten voor de vorige periode een vrij goede schatting zal kunnen maken voor de waarden van p, aan den anderen kant zal men langzaam werken, omdat men de nauwkeurigheid hoog zal opvoeren, om niet een hinderlijke accumulatie van kleine fouten mogelijk te maken.

In de bovenstaande formule zijn de waarden van P uit de berekening van het vorige tijdvak bekend. Bij ieder punt kan men dus bijschrijven de waarde van

$A P_M + \sum P_A + B \varphi_M + C$. De berekening verloopt dan verder op dezelfde wijze als in de vorige gevallen.

Put in het veld.

In fig. 18 is een terrein voorgesteld, omgeven door een randkanaal K, waarin zich bij P een afgepompte put bevindt. Geschiedt deze afpomping gedurende langen tijd en met constante capaciteit, dan zal de waterspiegel tenslotte een stationnair vorm aannemen, die echter niet op de bovenbesproken wijze mag worden berekend, omdat het phreatisch oppervlak in de buurt van P te weinig continu is, dan dat de ingevoerde benaderingen hier nog zouden gelden. Men kan echter op de volgende manier de uitkomst vinden, voor het geval het doorstroomprofiel D constant is en de scheidende laag geheel ondoorlatend. Dan wordt de differentiaalvergelijking n.l. lineair in p, en is superpositie van twee stroombeelden mogelijk. Met P

als middelpunt wordt een cirkelvormig kanaal C met straal R ingevoerd, dat geheel buiten het randkanaal valt. Het peil in het kanaal C kan willekeurig worden aangenomen.

Als het kanaal K niet aanwezig zou zijn, maar wel C, zou men de waarde van p langs exacten weg kunnen berekenen als functie van den afstand x tot den put, met behulp van de formule

$$p = \frac{Q}{2\pi k D} \ln \frac{x}{R},$$

(stroombeeld I).

Men kan hiermede voor alle randpunten (langs het kanaal K) en ook voor alle veldpunten de waarde voor p berekenen. Men vindt nu voor p in de randpunten waarden, die verschillen opleveren met de waterstanden, die in werkelijkheid in het randkanaal voorkomen. Deze verschillen zijn van randpunt tot randpunt anders. Zij zullen p_1 genoemd worden.

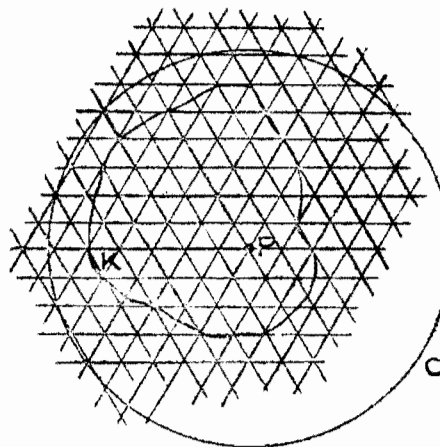


Fig. 18. Put in het veld.

Men berekent nu een tweede stroombeeld (stroombeeld II) met behulp van de bovengenoemde vereffeningsmethode, waarbij de waterstand in het randkanaal van punt tot punt varieert en $= p_1$ is. Bovendien wordt hierbij de regen ingevoerd, die bij stroombeeld I was weggelaten.

Door superpositie van I en II vindt men tenslotte de uitkomst.

Grondwater onder druk.

par. 23. Probleemstelling, afleiding van de differentiaalvergelijking en methode.

Fig. 19a stelt den plattegrond voor van een polder, die langs de scheidingslijn AB verdeeld is in twee afdeelingen met verschillend peil. Onder den polder bevindt zich een doorgaande laag met geringe waterdoorlatendheid. Daaronder bevindt zich een laag van goed doorlatend materiaal ter dikte D, aan de onderzijde begrensd door geheel ondoorlatende lagen (fig. 19b). Bij het droogmaken van den polder wordt de waterstand in de linker afdeeling met een bedrag p_1 verlaagd ten opzichte van den waterstand, die ter plaatse vroeger voorkwam. In de rechter afdeeling is dit bedrag p_2 . Buiten den polder verandert de waterstand uiteraard niet. In fig. 19c zijn in een doorsnede de waarden uitgezet, waarmee de waterstanden veranderen tengevolge van het droogmaken van den polder. Bovendien is in deze doorsnedeteekening het verloop van de potentiaal ψ van het grondwater onder de scheidende laag aangegeven, d.w.z. van het bedrag, waarmee de potentiaal verandert tengevolge van het droogmaken.

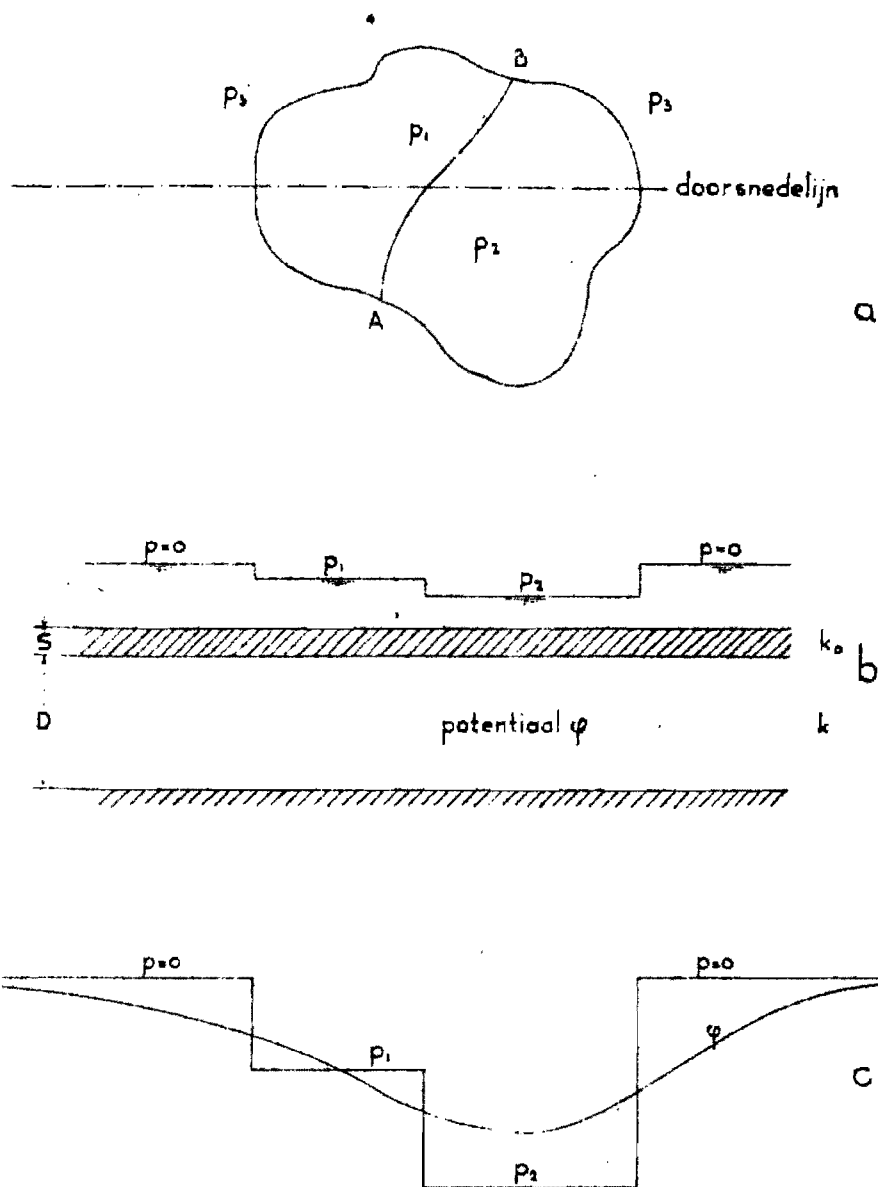


Fig. 19. Polder met twee afdelingen.

Het vraagstuk is nu, om het verloop van φ te berekenen onder den polder en in de omgeving hiervan, wanneer de vorm van den polder gegeven is, en ook de waarden van p_1 en p_2 .

Men kan het vraagstuk nog iets uitbreiden door te stellen: in een terrein van bekende vorm wordt de waterstand op bekende wijze veranderd, waarbij de verandering op willekeurige wijze over de oppervlakte van het gebied verdeeld is. Gevraagd de veranderingen φ van de potentiaal onder de scheidende laag. Dit meer algemeene geval doet zich b.v. voor in de duinwaterwinplaats van een waterleidingbedrijf, waarin de waterstanden verhoogd worden door irrigatie met water, dat van buiten aangevoerd wordt, ofwel verlaagd worden door het winnen van oppervlaktewater.

Over het gebied wordt een driehoeksnet geteekend en de vraag is weer, de waarde voor φ in ieder punt van dit net te berekenen.

De differentiaalvergelijking voor φ wordt op dezelfde wijze afgeleid als vroeger voor p het geval was (zie fig. 15). Door een verticaal vlak ter breedte GH

(= b) en ter hoogte D stroomt een hoeveelheid water:

$$Q_A = k D b \frac{\varphi_M - \varphi_A}{a},$$

waarin k = de doorlatendheid van de zanden onder de scheidende laag, terwijl de verdere notaties overeenkomstig de vorige zijn. Door HI stroomt

$$Q_B = k B b \frac{\varphi_M - \varphi_B}{a},$$

en door de zes zijden van den gearceerden zeshoek samen stroomt

$$\sum Q_A = k D b \frac{6\varphi_M - \sum \varphi_A}{a}.$$

Deze hoeveelheid moet worden aangevuld door water, dat door de scheidende laag infiltreert. Is de doorlatendheid van deze laag k_0 m/sec en de dikte S meter, dan bedraagt de infiltratie volgens Darcy:

$$Q_{inf} = \frac{k_0}{S} opp_b (p_M - \varphi_M).$$

Wegens continuïteit is $\sum Q_A = Q_{inf}$, dus

$$k D b \frac{6\varphi_M - \sum \varphi_A}{a} = \frac{k_0}{S} opp_b (p_M - \varphi_M).$$

Drukt men b en opp_b in a uit, en lost men φ_M op, dan vindt men:

$$\varphi_M = \frac{\sum \varphi_A + \frac{3}{2} \frac{k_0}{k D} a^2 p}{b + \frac{3}{2} \frac{k_0}{k D} a^2},$$

of

$$\varphi_M = \frac{\sum \varphi_A + A p_M}{B},$$

waarin $B = 6 + A$.

Men werkt met deze differentiaalvergelijking op dezelfde wijze als in de vorige par. De waarde van $A p_M$ wordt vooraf bij de punten geschreven. Met de vereffening gaat men zoover door tot alle correcties kleiner zijn dan een bepaald bedrag. Van de beteekenis van dit bedrag kan men zich rekenschap geven door het om te rekenen in een variatie van p_M . Men kan op praktische gronden aangeven, welke afwijkingen van p_M men wil toelaten, en daarnaar het bedrag van de niet-vereffende correcties bepalen.

Een groot verschil met de voorgaande vereffening treedt op, doordat hier geen randvoorwaarde aanwezig is ter plaatse van den rand van den polder. De randvoorwaarde luidt hier n.l.: op oneindig grooten afstand van den polder is $\varphi = 0$. Men zou dus het net tot in het oneindige door moeten teekenen, en de vereffening tot daar moeten voortzetten. In de volgende paragrafen zullen twee methoden worden besproken om dit inconvenient te ondervangen.

Het spreekt vanzelf, dat men de methode kan toepassen als in een grooten kring om het beschouwde gebied φ uit metingen bekend is. Wanneer men een hydrologische berekening voor een bepaald gebied opzet, zal men veelal eerst een schatting maken voor de doorlaatefficiënten, en deze daarna op de proef stellen door den bestaanden toestand na te rekenen. In dit geval zijn randvoorwaarden uit meting bekend, terwijl men voor de eerste schatting kan uitgaan van de verder gemeten waarden, en dan direct kan constateeren, of men groote verschillen krijgt.

Terwijl men in het aanvankelijk gestelde vraagstuk te doen had met veranderingen in p, gaat men hier uit van de waarden van p zelf. Het verschil is, dat de veranderingen van p zich beperken tot het gebied zelf, en daarbuiten zijn. De waarden van p echter zullen in het algemeen ook buiten het gebied van nul verschillen. Ze moeten bekend zijn binnen den grooten kring, die om het gebied getrokken wordt.

par. 24. Het berekenen van een randvoorwaarde door veelvuldige superpositie.

Als in een cirkelvormig gebied de grondwaterstand boven de scheidende laag gelijkmatig verhoogd of verlaagd wordt, en buiten dit gebied onveranderd blijft, kan men langs analytischen weg de verandering in de drukverdeling onder de scheidende laag berekenen, die hier het gevolg van is. In fig. 20 is dit theoretische geval voorgesteld. Het verloop van de grootheid φ is aangegeven in fig. 20c.

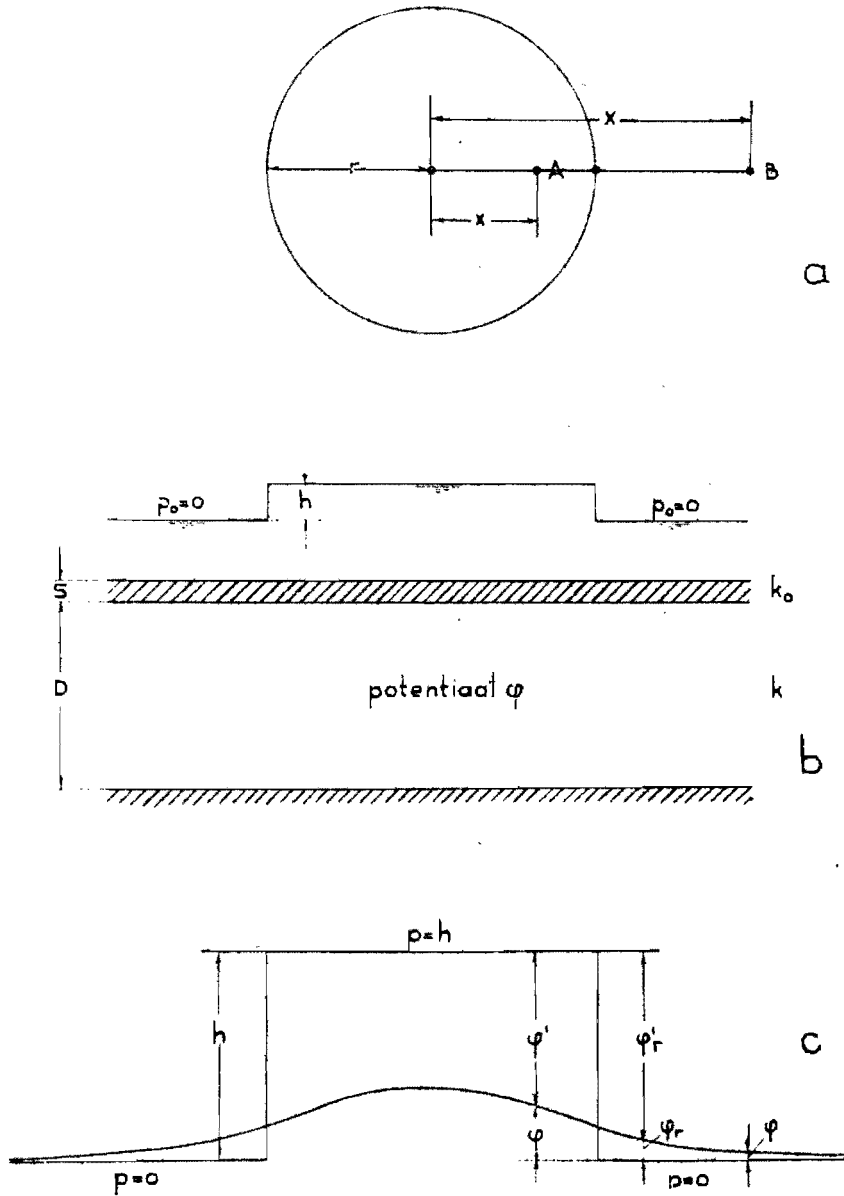


Fig. 20. Invloed van peilverandering in een cirkelvormig gebied.

De berekening geschiedt met de volgende formules:

Aan den rand van den cirkel is

$$\varphi_a = \frac{J}{J+K} h$$

Hierin is $J = \frac{J_1(r/\lambda)}{J_0(r/\lambda)}$

en $K = \frac{K_1(r/\lambda)}{K_0(r/\lambda)}$,

waarin J_1, J_0, K_1 , en K_0 Besselfuncties voorstellen, 1)

en waarin $\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{k_0}}{s} \frac{1}{kD}$. Voor de overige notaties wordt verwezen naar de teekening.

Binnen den cirkel geldt:

$$\varphi' = \varphi_n' \frac{J_0(x/\lambda)}{J_0(n/\lambda)}$$

Buiten den cirkel geldt:

$$\varphi = \varphi_n \frac{K_0(x/\lambda)}{K_0(n/\lambda)} \quad 2)$$

De opgave was, het verloop van φ te berekenen, als over een groot gebied, p op willekeurige, bekende wijze verandert. Daartoe wordt een driehoeksnet geteekend, en men kan nu beginnen, met om ieder punt van het net (voor het gebied zelf) een zeshoekje te tekenen, overeenkomende met het gearceerde zeshoekje van fig. 15. Deze figuren sluiten bij elkaar aan, zoodat ze samen het heele veld vullen. In ieder punt van het net is de verandering van p gegeven, en men kan bij benadering aannemen, dat deze gelijkmatig verdeeld is over het zeshoekje, dat om dat punt geteekend is. Men zou zich nu kunnen denken, dat de verandering van p plaats had in één zeshoekje, terwijl overal elders p niet zou veranderen. Dit zou eenige verandering van φ teweegbrengen, het sterkste onder het beschouwde punt, verder hiervan verwijderd in mindere mate, en naar het oneindige toe tot nul naderende. Daarna kan men zich voorstellen, dat alleen in een ander punt, p zou veranderen. Ook hiervan zou een verandering van φ in den ondergrond het gevolg zijn. Aangezien de differentiaalvergelijking lineair is in φ , is superpositie mogelijk. Het gevraagde verloop van φ tengevolge van veranderingen in p over het heele gebied, kan men nu vinden door den invloed van de verandering in ieder zeshoekje afzonderlijk na te gaan, en de gevonden waarden op te tellen.

Den invloed van de verandering van p in één zeshoekje kan men bij benadering berekenen, door dit zeshoekje te vervangen door een cirkel met hetzelfde oppervlak. Met bovenstaande formules is dan voor ieder punt van het net de verandering van φ te berekenen. Men berekent dus den invloed van ieder punt in ieder punt, en vindt door sommatie de uitkomst.

Men krijgt hierbij een bepaalde bewerking zeer veel malen te herhalen, en men kan hierbij veel tijd besparen door een practische werkwijze te volgen. Vooruitloopende op een nader te geven uitgewerkt voorbeeld, wordt verwezen naar fig. 33. In het midden van de figuur is een gearceerde zeshoek geteekend. Verondersteld wordt, dat boven de scheidende laag alleen ter plaatse van dezen zeshoek de grondwaterstand met 1 m veranderd wordt. De cijfers, die in de figuur bijgeschreven staan, geven de verandering van φ aan in het centrale punt zelf en in de omringende punten. Het blijkt, dat de waarden naar buiten toe vrij sterk afnemen. In de buitenste zones is dan ook de verandering van φ niet meer punt voor punt berekend, maar zijn groote kringen geteekend, waarbinnen met de ingeschreven veranderingen van φ gerekend mag worden. Om voor deze laatste waarden de eenvoudige getallen 1, 2, 3 tot 10 te krijgen, zijn niet de waarden van φ zelf bijgeschreven, maar moeten de ingeschreven cijfers met 0.59 vermenigvuldigd worden om φ in mm te krijgen. De waarde 0.59 zoowel als de andere cijfers gelden natuurlijk alleen voor dit bepaalde voorbeeld.

(Opgemerkt moet worden, dat fig. 33 is samengesteld met behulp van meer globale formules dan hierboven zijn afgeleid. De waarde van φ in het middelste

1) Zie Jahnke-Emde, Funktionentafeln 3e druk, 1938 Hierin worden andere notaties gebruikt. Blz. 236: $\frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(ix) = K_0(x)$, blz 237: $-\frac{\pi}{2} i H_1^{(1)}(ix) = K_1(x)$; blz 226: $\int_0^1(i x) = J_0(x)$, blz 227: $-i \int_1^i(i x) = J_1(x)$.

2) Rapporten en mededeelingen van de Zuiderzeewerken No. 5, Aangangsels par. 3. Ir. B.A. van Nes - De Ingenieur 1935, B 177-180.

punt moet eigenlijk 61 zijn, terwijl alle andere bedragen ca 4% hooger moeten zijn. Aangezien de figuur echter deel uitmaakt van een zeer groote berekening, en de afwijkingen niet groot zijn, heeft geen correctie plaats gevonden).

Fig. 33 geeft dus aan hoe groot in ieder punt de verandering van φ is, als P in het middelste zeshoekje met 1 m verandert. Men kan de figuur echter ook anders lezen en zeggen: het cijfer, dat bij een willekeurig punt A geschreven is, geeft aan, hoe groot de verandering van φ in het middelste punt M is, als in het zeshoekje om A de grootheid p met 1 m verandert.

Men denke zich nu fig. 33 op groote schaal in inkt geteekend op wit papier. Het driehoeksnet teekent men op dezelfde schaal op doorschijnend papier. Links van de punten schrijft men hierop de bedragen bij, waarmede de bovenwaterstand veranderd wordt. (buiten het beschouwde gebied = 0). Aangezien in fig. 33 de cijfers aan de rechterzijde van de punten bijgeschreven zijn, ziet men, als de bladen op elkaar gelegd worden, bij ieder punt twee getallen achter elkaar staan. Vermenigvuldigt men deze met elkaar, en telt men de uitkomsten voor alle punten bij elkaar op, dan vindt men de verandering van φ voor het punt, dat boven het gearceerde zeshoekje ligt van fig. 33. Door de bladen telkens een stukje te verschuiven, kan men de verandering van φ in ieder punt vinden. Deze methode gaat vrij snel, als men de veranderingen van de bovenwaterstand b.v. tot op dm afrondt, en verder beschikt over een goede telmachine, waarop men ook eenvoudige vermenigvuldigingen kan uitvoeren.

Toch zal men niet voor alle punten de waarde van φ op deze wijze berekenen. Men kan volstaan met φ te berekenen in alle punten langs den rand van het gebied, waarin de bovenwaterstand veranderd wordt). Voor de daarbinnen gelegen punten kan men de vroeger besproken vereffeningsmethode toepassen. Men berekent hier dus eerst de randvoorwaarde, en gaat daarna vereffenen. Om dadelijk van een goede schatting uit te gaan, kan men φ voor één of twee punten midden in het veld nog vooraf berekenen.

par. 25. Grooter wordende zeshoeken.

Er is verondersteld, dat het gebied, waarbinnen de grondwaterstand p verandert, een willekeurigen vorm heeft, en dat de veranderingen van p op willekeurige wijze over dit gebied verdeeld zijn. Het verloop van φ onder het gebied en daarbuiten wordt daardoor ook willekeurig. Hoe verder men zich echter van het gebied verwijderd, hoe minder deze willekeurigheden zich zullen doen gevoelen, en hoe meer φ die waarden zal naderen, die verkregen zouden worden bij een cirkelvormig gebied van dezelfde oppervlakte met een gelijkmatige grondwaterstandsverandering, overeenkomende met de gemiddelde verandering van p. Men kan dus om het gebied een zeer grooten cirkel trekken, waarin men bij benadering φ berekent, alsof aan deze voorwaarden voldaan was. De berekening kan geschieden met de reeds eerder vermelde formules. Men heeft dan een randvoorwaarde berekend, en kan in het gebied binnen den grooten cirkel met de eerder genoemde vereffeningsmethode het verloop van φ berekenen.

Aangezien de genoemde cirkel echter zeer groot moet zijn, zou men een net met zeer veel punten verkrijgen, en zou de oplossing te veel tijd vergen. Daarom is een methode ontwikkeld, waarbij de driehoeken, waaruit het veld is opgebouwd, van binnen naar buiten gaande geleidelijk groter worden, maar zoodanig, dat de differentiaalvergelijking ook voor de verteekende figuur blijft gelden (zie fig. 21 en 22). Voorwaarde daarvoor is, dat in fig. 21 de lijnen MA en GH na transformatie loodrecht op elkaar blijven staan, dat hun verhouding dezelfde blijft, en dat dit met de overeenkomstige lijnen ook het geval is. Het loodrecht op elkaar staan is noodig om het potentiaalverschil tusschen M en A maatgevend te doen zijn voor de hoeveelheid water, die door GH stroomt, en het gelijkblijven van de verhouding $\frac{MA}{GH}$ is noodig, omdat deze verhouding voorkomt in de formules, waaruit de differentiaalvergelijking is afgeleid. De transformatie geschiedt nu volgens het onderstaande principe (zie fig. 21) :

De lijn PG wordt omgebogen tot een cirkel met straal R. De getransformeerde punten P' en Q' vallen daardoor samen, evenals de lijnen P'R' en Q'S'. Met een punt E, met coördinaten x en y, komt een punt E' overeen met coördinaten θ en ρ . De grootheid θ is alleen een functie van x, en ρ is alleen een functie van y. Uit het bovenstaande volgt reeds, dat $\theta = \theta R$. De

grootheid ρ wordt nu zoodanig als functie van y gekozen, dat een lijn S zoodanig in een kromme S' getransformeerd wordt, dat de hoek $\alpha' = \alpha$. Hiertoe moet $\frac{dy}{dx}$ gelijk zijn aan $\frac{\rho d\alpha}{\rho da}$. Met gebruikmaking van de bovenstaande betrekking tusschen x en θ kan men hieruit door integratie afleiden:

$$y = R \ln \frac{\rho}{R},$$

waarmede de transformatie bepaald is. De hoek, die een lijn met de x as maakt, blijft dus na transformatie bewaard en daardoor ook de hoek, die twee lijnen met

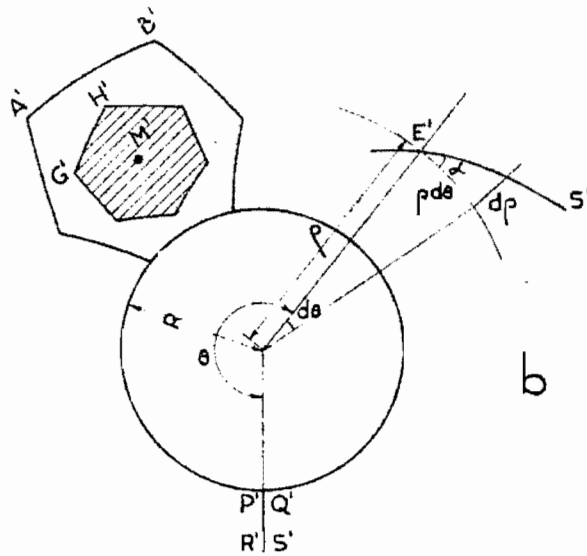
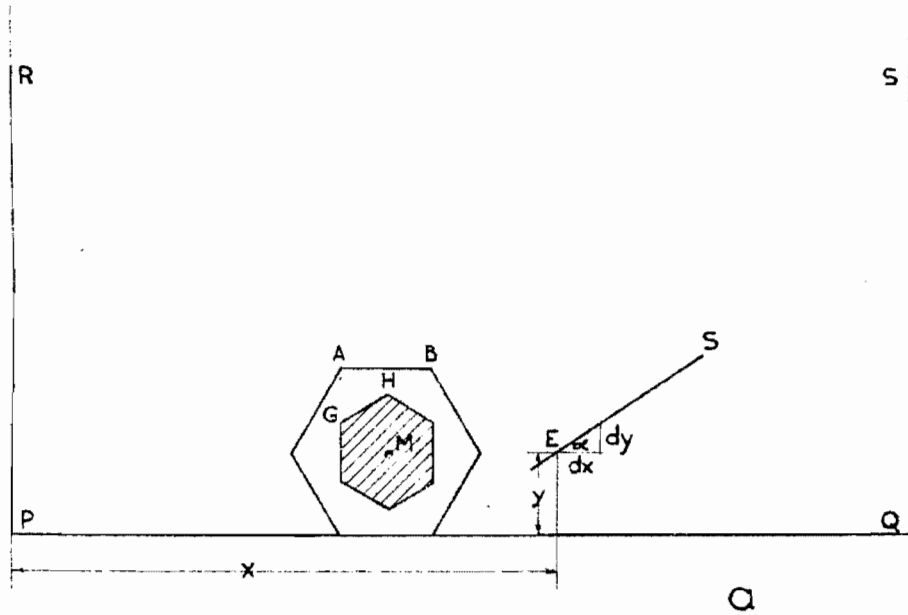


Fig. 21. Transformatie van een zeshoekje.

elkaar maken. De rechte hoek tusschen MA en GH wordt dus door de transformatie niet veranderd. Uit gelijkvormigheid van driehoeken kan men aantoonen, dat de onderlinge verhouding dan ook bewaard blijft.

De transformatie van een driehoeksnet is in fig. 22 voorgesteld. Voor de getransformeerde zeshoeken geldt de differentiaalvergelijking dus op dezelfde wijze als voor de niet-getransformeerde, alleen moet men er op letten, dat de grootheid a overgaat in de grootheid a' , die niet constant is, maar varieert met ρ . De verhouding $\frac{a'}{a} = \frac{d\rho}{\rho}$. Uit bovenstaande formules kan men afleiden: $a' = \frac{\rho}{R} a$.

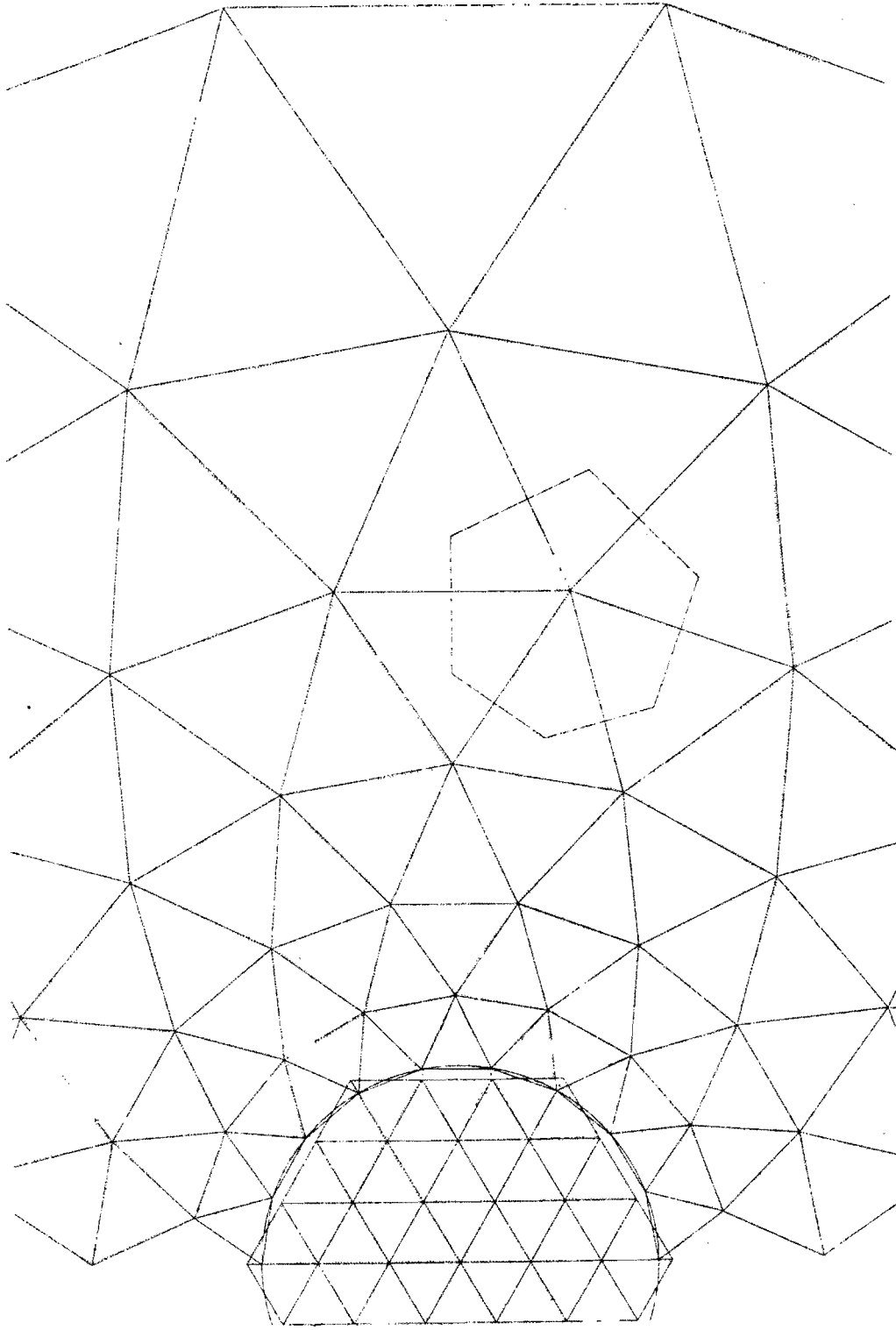


Fig. 22. Aansluiting van getransformeerd en niet getransformeerd zeshoekennet.

Aangezien a ook voorkomt in de grootheid B van de differentiaalvergelijking $\psi_M = \frac{\sum p_a + A p_M}{B}$, moet men vooraf voor ieder punt niet alleen $A p_M$, maar ook B berekenen en met rooden inkt bijschrijven.

Men kan het verteekende veld niet voortzetten tot in het middelpunt van den cirkel, omdat de driehoekjes naar binnen gaande steeds kleiner zouden worden en tot nul zouden naderen. Binnen den cirkel met straal R past men daarom een gewoon driehoeksnet toe; er buiten het verteekende. Het is nu niet mogelijk, deze twee velden precies bij elkaar te doen aansluiten. Men moet hiertoe punten invoeren, midden tusschen de niet-samenvallende punten liggend, en verder met de gestippelde lijnen werken. De fouten, die hiermee gemaakt worden, zijn van een geheel andere soort dan de andere benaderingen.

Men krijgt in het grensgebied n.l. te doen met onregelmatig verteekende zeshoeken. Wat de grootheid opp_b betreft, brengt dit geen bezwaar mee, omdat men deze grootheid door opmeting ook uit de verteekende figuur kan bepalen. Bij de afleiding van de differentiaalvergelijking is echter uit

$$Q_A = k D b \frac{p_M - p_A}{a}$$

door sommatie afgeleid:

$$\sum Q_A = k D \frac{b}{a} \sum (p_M - p_A)$$

Bij een onregelmatigen zeshoek moet dit zijn:

$$\sum Q_A = k D \sum \frac{b}{a} (p_M - p_A)$$

In het algemeen is de grootte van de gemaakte fouten niet aan te geven, omdat deze afhangt van de waarden van p, die bij ieder vraagstuk anders zijn. Ze zullen echter niet groot zijn. De grootheid $\frac{p_M - p_A}{a}$, d.i. het verhang, wordt n.l. gemeten langs de gestippelde lijn, en zal weinig afwijken van het verhang langs de getrokken lijn, die er maar een zeer kleinen hoek mee maakt. Voor a kan men in de differentiaalvergelijking de waarde invoeren, bepaald uit $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} = opp_b$, waarbij opp_b door opmeting uit de figuur bepaald wordt. Dit houdt tevens in, dat men met een waarde voor b werkt, die ongeveer de gemiddelde lengte zal voorstellen van de zes zijden van den gearceerden zeshoek. De variaties in b zijn ten opzichte van deze waarde zoowel positief als negatief, zoodat de gemaakte fouten elkaar gedeeltelijk zullen opheffen.

Waar men ten slotte van het eene net op het andere overgaat, is principieel onverschillig.

Strooming van zoet en zout grondwater.

par. 26. Algemeene theorie.

Een uitgebreider verhandeling over dit onderwerp komt voor in het "Rapport 1940" van de Gemeentewaterleidingen van Amsterdam". 1) Aangezien het onderwerp slechts zijdelings te maken heeft met de methode van de zeshoekjes, zal hier volstaan worden met het aanstippen van de belangrijkste punten.

1, Men denke zich een duingebied van constante breedte, aan beide zijden begrensd door zee, met ter weerszijden hetzelfde peil. Men verkrijgt dan een soort strandwal, waarvan fig. 23 een dwarsdoorsnede geeft. De regen, die op het duinterrein valt, dringt voor een gedeelte in den grond, vormt daar een zoetwaterlichaam, en stroomt volgens de geteekende pijlen naar de zee af.

Blijven de voorwaarden van vorming gedurende langen tijd onveranderd, dan ontstaat een stationnaire eindtoestand.

Hierbij ontstaat, blijkens waarneming in bestaande duingebieden, een vrij scherpe grens tusschen zoet en zout grondwater. De overgang van zoet grondwater (ρ' gehalte onder 100 mg/l, soortelijk gewicht ca. ≈ 1) naar

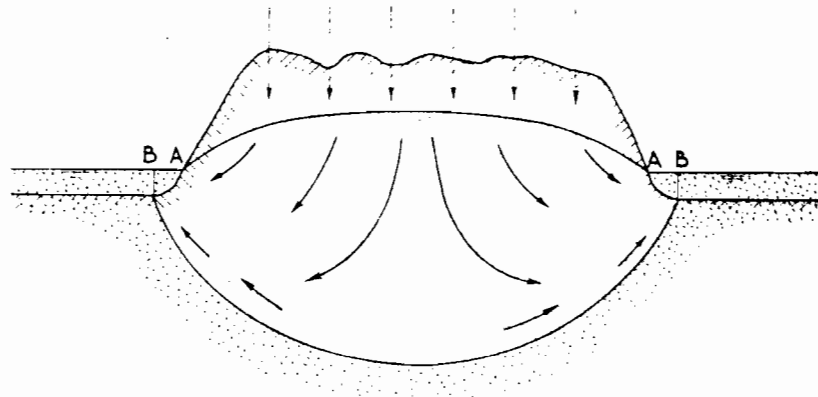


Fig. 23. Zoetwaterlichaam onder een strandwal zonder kleilaag.

zout grondwater (ρ' gehalte ca. 16000 mg/l, soortelijk gewicht rond 1.02) heeft plaats over een zone van circa 10 m. dikte. Bij een theoretische behandeling van het vraagstuk zal de dikte van deze laag verwaarloosd worden, en een onmiddellijke aaneengrenzing van de twee watersoorten verondersteld worden.

Omdat de twee zeeniveaus even hoog gedacht zijn, is er geen strooming in het zoute water; het zoete water stroomt daarentegen wel. Alle regenwater, dat in den grond dringt stroomt tenslotte op zee af. Aan de ééne zijde van het scheidingsvlak treden daardoor stroomingen op, terwijl aan de andere zijde het grondwater in rust is. Nader zal worden afgeleid, dat deze toestand noodig is voor het bewaren van het evenwicht van het grensvlak.

2. Figuur 24 geeft denzelfden toestand weer als fig. 23, met dit verschil,

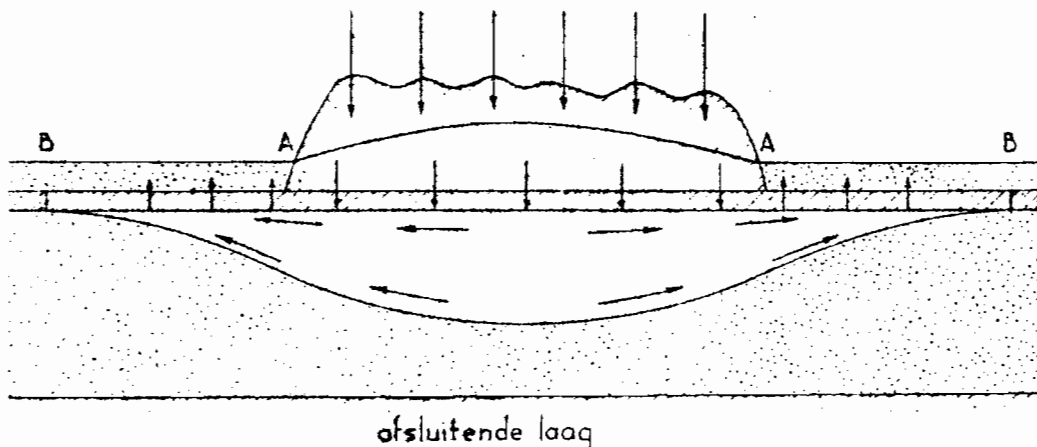


Fig. 24. Zoetwaterlichaam onder een strandwal met kleilaag.

dat een scheidende laag aanwezig is. In principe is het stroombeeld hetzelfde : onder het duinterrein hebben noerwaartsche stroomingen plaats, die den zoetwaterzak voeden; in dezen zak beweegt het water zich buitenwaarts, terwijl onder de zee opwaartsche stroomen de afstroming op zee bewerkstelligen. Het verschil met fig. 23 bestaat hierin, dat de afstand AB, die in fig. 23 zeer kort is, nu zeer lang wordt (bij bestaande duinterreinen verscheidene kilometers). Het water zoekt een groot oppervlak om de moeilijk doorlatende scheidende laag met geringe drukverliezen te kunnen passeeren. Bij de verhoudingen van het Nederlandsche duingebied is de geheele fig. 24 zeer langgerekt, en zijn de stroomingen in den zoetwaterzak vrijwel horizontaal, en die in de scheidende laag vrijwel verticaal. Uit modelproeven is gebleken, dat de scheidende laag tusschen A en B met zoet water gevuld is, en dat zich hierboven het zwaardere zoute water bevindt. Het uitstroomende zoete water belet het zoute water blijkbaar in de laag te dringen.

3. Als het ééne zeeniveau hoger staat dan het andere, stelt zich ook een zoutwaterstrooming in. Buiten de punten B dringt het zoute water door de scheidende laag, terwijl onder den zoetwaterzak door, een transport van zoutwater plaats heeft. Ook hierbij is een evenwichtsstand van den zoetwaterzak mogelijk, die in dit geval echter een asymmetrischen vorm zal hebben, Langs het grensvlak van de watersoorten stroomen nu zoowel het zoete als het zoute grondwater, echter niet met dezelfde snelheid. Zelfs kan de zin van de beweging tegengesteld zijn.

4. Een evenwichtsstand van den zoetwaterzak, d.i. een stationnair stroombeeld, stelt zich alleen in, als gedurende langen tijd de voorwaarden tot het ontstaan niet veranderen. Men moet hierbij denken aan perioden van vele eeuwen. In de werkelijkheid zal men onder de duinen van Nederland wel nergens een stationnair toestand aantreffen. Door de diverse waterleidingbedrijven, die de duinen exploiteeren is op zeer grillige wijze in zeer belangrijke mate ingegrepen in den bestaanden toestand door wateronttrekking boven en beneden de scheidende laag, irrigatie e.d.m. Ook het droogmaken van polders, zooals de Haarlemmermeer, de Schormer en andere, doet eeuwen lang zijn invloed gelden. De groote traagheid, waarmee evenwichtstoestanden zich instellen, laat zich hieruit verklaren, dat voor het aannemen van een nieuwen vorm van de zoetwaterzak enorme hoeveelheden zoet water vervangen moeten worden door zoutwater, endat dit gebeurt met de zeer geringe snelheden, die aan grondwaterbewegingen eigen zijn. Bij de niet-stationnaire strooming is in het algemeen het geheele scheidingsvlak in beweging. Ook al zijn de verplaatsingen traag, toch gaan hiermee belangrijke veranderingen van potentialen en snelheden gepaard, waardoor het stroombeeld sterk af kan wijken van dat bij stationnaire toestanden. Gezien de zeer trage totstandkoming van evenwichtstoestanden heeft het weinig zin deze te berekenen. Berekening is meestal wel mogelijk. De differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden laten zich zelfs gemakkelijk opstellen; de oplossing moet echter benaderend en tastenderwijs geschieden, wat tijdroovend is. Meestal zal men zich echter interesseeren voor het verloop van de stroomingen over de periode, waarin geprojecteerde werken (waarvoor men de berekening maakt) afgeschreven worden, d.i. over 40 à 50 jaar. Een dergelijke periode mag men bij benadering als een tijdinterval Δt beschouwen, zoodat het vraagstuk veelal zoo gesteld zal worden: gegeven een bepaalde toestand, waarvan de ligging van het grensvlak en diverse waterstanden en potentialen bekend zijn uit waarneming aan boringen, gegeven verder plotselinge verandering door bedrijfsvoering, gevraagd de wijzigingen die hierdoor in het stroombeeld ontstaan dadelijk na de verandering. Men mag dan rekenen, dat over de eerste 40 à 50 jaar de toestand weinig zal afwijken van den begintoeestand. Voor dit geval zal in de volgende par. een berekeningsmethode worden afgeleid.

Een complicatie doet zich voor, doordat aan de landzijde van de duinen zoetwater aanwezig is. Omtrent het chloorgehalte van het grondwater in de strook achter de duinen is weinig bekend door het ontbreken van diepe boringen. Het is waarschijnlijk, dat de scherpe scheiding tusschen zoet en zout water zich hier niet voortzet, maar dat vermenging plaats vindt en vorming van brak grondwater. Zooals uit het volgende zal blijken, is deze quaestie echter niet van invloed op de oplossing van het hierboven gestelde vraagstuk.

5. Welk verband bestaat er tusschen de zoetwaterpotentialiaal ψ en de zout-

waterpotentiaal Ψ in twee punten A en B ter weerszijden van het grensvlak der watersoorten (zie fig. 25)? Men denke zich in beide punten piëzometerbuizen geplaatst, waarvan de ééne (in A) met zoetwater en de andere (in B) met zoutwater gevuld is. De stijghoogten zijn resp. φ en γ meter boven het vergelijkingsvlak. Brengt men in vergelijking, dat de vloeistofdruk (= hoogte vloeistofkolom x soortelijk gewicht) in A en B gelijk moet zijn, dan vindt men:

$$(\varphi - \gamma)\gamma_0 = (\Psi - \gamma)\gamma,$$

of

$$\gamma_0 \varphi = \gamma \Psi - (\gamma - \gamma_0) \gamma.$$

Hierin is γ het soortelijk gewicht van het zoute, γ_0 van het zoete water ($\gamma_0 = 1$). Dit verband bestaat zoowel bij bewegend als bij in rust zijnd grensvlak. Voor het bijzondere geval, dat het zoute water niet stroomt, is Ψ constant. φ is dan alleen van γ afhankelijk, en wel volgens een lineaire functie. Is $\gamma - \gamma_0 = 0,02$, dan stijgt φ met 2 cm. bij iederen meter daling.

6. Met bovenstaande formule is het verband gegeven tusschen φ , Ψ en γ . Verplaatst het punt A (en daarmee B) zich langs het grensvlak, dan veranderen alle drie de grootheden. Het verband tusschen de veranderingen vindt men door differentiatie naar S (dat is de lengtemaat langs het grensvlak):

$$\gamma_0 \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial S} - (\gamma - \gamma_0) \frac{d\gamma}{ds}.$$

Het bestaan van een grootheid $\frac{\partial \varphi}{\partial S}$ wijst op het aanwezig zijn van een snelheid v van het zoete water langs het grensvlak (zie fig. 26). Eveneens wijst het bestaan van een grootheid $\frac{\partial \Psi}{\partial S}$ op de aanwezigheid van een snelheid u in het zoute water. Telt men u , $\frac{\partial \varphi}{\partial S}$ en ds positief van links naar rechts, dan is volgens Darcy:

$$v = -k \frac{\partial \varphi}{\partial S} \quad \text{en} \quad u = -k \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{\partial \Psi}{\partial S}. \quad 1)$$

Dit gesubstitueerd levert op:

$$v - u = k \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \frac{d\gamma}{ds},$$

d.i. het verband tusschen de snelheden ter weerszijden van het grensvlak en de helling hiervan.

In fig. 26 zijn verschillende mogelijke gevallen voorgesteld, voor het geval het rechter lid van de vergelijking = 10 eenheden is. Men ziet, dat bij een hellend grensvlak niet beide watersoorten in rust kunnen zijn. Het evenwicht vereischt de strooming van minstens één van de watersoorten.

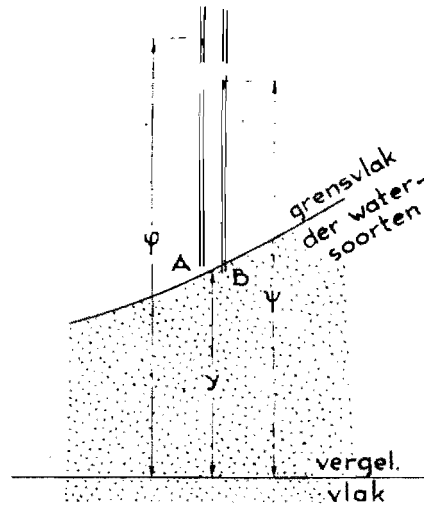


Fig. 25. Vergelijking van zoet- en zoutwaterpotentialen.

1) Bij een nauwgezette toepassing van het beginsel, dat de weerstand van een vloeistofstrooming evenredig is met de snelheid, vindt men dat in de wet van Darcy de doorlaatcoëfficiënt evenredig is met γ .

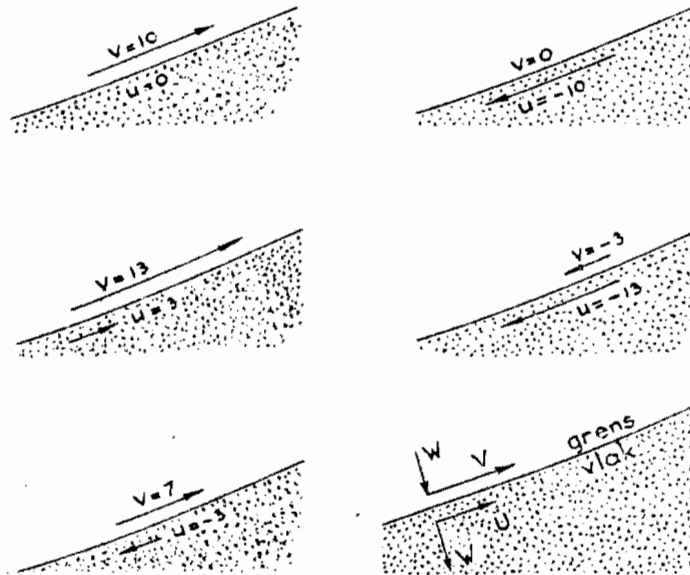


Fig. 26. Verschillende mogelijkheden wat betreft de zoet- en zoutwatersnelheden ter weerszijden van een hellend grensvlak.

Bovendien kan er, zooals in fig. 26 rechts onder is aangegeven, een snelheidscomponent w zijn, loodrecht op het grensvlak. Deze moet ter weerszijden, volgens continuïteit, even groot zijn. Is w aanwezig, dan is de toestand niet-stationnair, en is w de snelheid, waarmee het grensvlak zich verplaatst. De mathematische voorwaarde voor een stationnair toestand is immers: $w = 0$. Op zeker tijdstip van een niet-stationnaire beweging geldt: $\gamma_0 \varphi = \gamma \psi - (\gamma - \gamma_0) \eta$. Brengt men een plotselinge wijziging aan, b.v. door het inschakelen van een puttenbemaaling of het wijzigen van waterstanden boven de scheidende laag, dan zullen φ en ψ plotseling veranderen, wat met de grootte η niet dadelijk het geval is. Ook in de nieuw ingetreden fase moet aan bovenstaande vergelijking voldaan worden, zoodat voor de veranderingen van φ en ψ , (resp. $\Delta \varphi$ en $\Delta \psi$) geldt:

$$\gamma_0 \Delta \varphi = \gamma \Delta \psi.$$

Ter weerszijden van het grensvlak veranderen de potentialen met bedragen, die slechts een factor $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ verschillen, en dus bijna gelijk zijn. Door differentiatie naar S kan men afleiden, dat de snelheden evenwijdig aan het grensvlak met gelijke bedragen veranderen, of:

$$\Delta V = \Delta U.$$

De snelheid w moet zoowel in den ouden als in den nieuwen toestand ter weerszijden van het grensvlak gelijk zijn uit continuïteitsoverwegingen, dus ook de verandering van w is ter weerszijden dezelfde.

Resumerende kan men zeggen: Een plotseling ingrijpen in de strooming van twee watersoorten heeft een extra stroombeeld tengevolge, dat men op het aanvankelijke mag superponeren, en dat kan worden berekend alsof zich in den ondergrond maar één watersoort bevond.

par. 27. De methode van de zeshoekjes, toegepast op de strooming van zoet en zout grondwater.

Fig. 27 stelt de dwarsdoorsnede voor over een terrein, waar zich onder de scheidende laag zoet en zout water bevindt. Aangenomen wordt, dat de beweging op zeker oogenblik niet-stationnair is en dat over een beperkt gebied uit metingen bekend zijn: de waterstanden p boven de scheidende laag, de potentialen φ en

Ψ en de ligging van het grensvlak. Men moet zich voorstellen, dat overdenplaat-

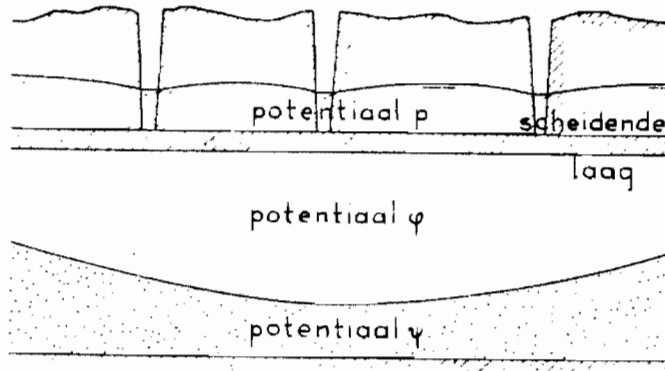


Fig. 27. Dwarsdoorsnede over een gebied, waar zich in den ondergrond zoet en zout water bevindt.

tgrond van het gebied een driehoeksnet geteekend is, en dat de waarden van ϕ , ψ , Ψ en γ voor ieder punt bekend zijn. Het is niet noodig, dat Ψ gemeten wordt, want deze grootheid kan van punt tot punt uit ϕ en ψ berekend worden. Men kan nu vragen naar de bewegingen van het grensvlak, d.w.z. men kan zich tot taak stellen, $\frac{dy}{dt}$ in ieder punt van het net te berekenen. Dezelfde vraag kan men stellen, wanneer men aanneemt, dat ten behoeve van een of andere bedrijfsvoering de waterstanden boven de scheidende laag plotseling op bekende wijze veranderd worden, en daarna op hun nieuwen stand gelaten worden. Deze plotselinge verandering van de bovenwaterstanden heeft een extra stroombeeld onder de kleilaag tengevolge, dat berekend kan worden, alsof zich in den ondergrond één watersoort bevond. Hoe dit stroombeeld berekend wordt, is in de vorige paragrafen uiteengezet. Heeft men de berekening uitgevoerd, dan kunnen door superpositie de nieuwe waarden van ϕ en ψ berekend worden. Men weet dan, evenals vóór het ingrijpen in de bovenwaterstanden, alle potentialen en de ligging van het grensvlak. Het vraagstuk, $\frac{dy}{dt}$ in ieder punt te berekenen, is dus geheel hetzelfde, wanneer het wordt gesteld voor den toestand vóór of na de verandering.

Men zie nu fig. 15 en stelde zich voor, dat dit de plattegrond is van een prisma, aan de onderzijde begrensd door de ondoorlatende laag, en aan de bovenzijde door het grensvlak van zoet en zout water. De hoeveelheid water, die door GH getransporteerd wordt van M naar A is

$$Q_A = kb \frac{\gamma_A + \gamma_M}{2} \frac{\Psi_M - \Psi_A}{a},$$

welke hoeveelheid te berekenen is, omdat alle grootheden van het rechterlid van de vergelijking bekend zijn. Eveneens zijn Q_B , Q_C enz. te berekenen, dus ook $Q_{tot} = \sum Q_A$. Is Q_{tot} positief, dan moet op grond van continuïteitsoverwegingen het grensvlak der watersoorten dalen, is Q_{tot} negatief, dan moet het stijgen. In vergelijking gebracht luidt dit:

$$- \sigma \rho k b \mu \frac{\partial y}{\partial t} = Q_{tot}$$

Hierbij moet men voor μ het geheele poriëngehalte invoeren, veronderstellende, dat bij beweging van het grensvlak al het zoute water door zoet water wordt vervangen en omgekeerd. Drukt men $\sigma \rho k b$ in a uit, dan vindt men:

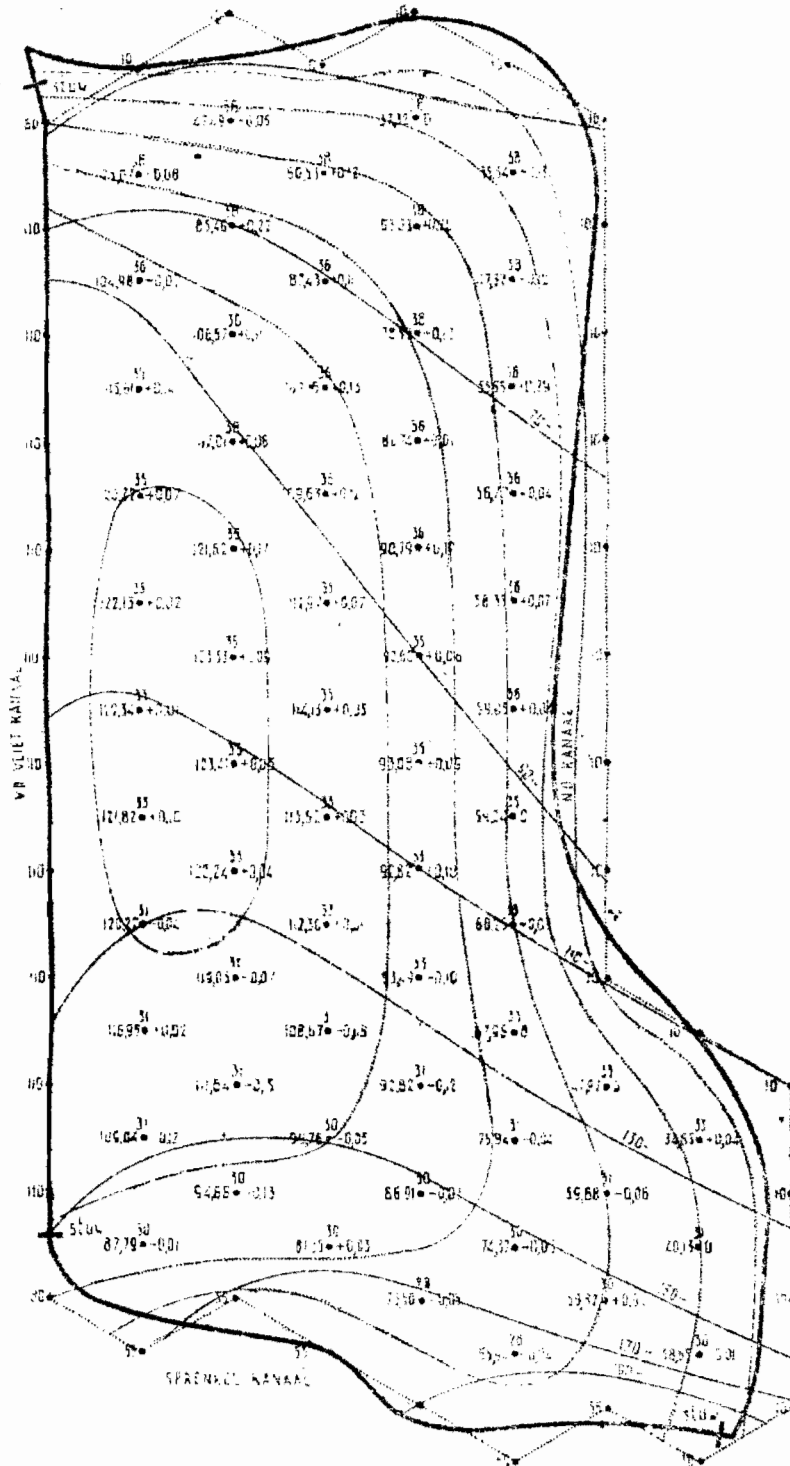
$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{2}{3} \sqrt{3} \frac{1}{a^2 \mu} Q_{tot}$$

waarmee in ieder punt $\frac{\partial y}{\partial t}$ te berekenen is. Zoals boven reeds is toegelicht, zal deze grootheid in den loop van b.v. 50 jaar weinig veranderen, zoodat met deze berekening een goed inzicht in de waterbewegingen verkregen wordt over een pe-

riode, waarvoor men nieuwe werken aanlegt.

Toepassingen.

par. 28. Toepassing 1. Berekening van de bovenduinstanden in het duingebied van de Amsterdamsche waterleiding tusschen het Van der Vlietkanaal, het Sprenkelkanaalen het Noord Oosterkanaal.



Het duingebied van de Amsterdamsche waterleiding wordt doorsneden door een net van kanalen, waardoor vele gebieden ontstaan, rondom begrensd door duinkanalen. Deze gebieden hebben in het algemeen willekeurige vormen, terwijl de duinkanalen in panden verdeeld zijn met verschillende peilen. Uit den wensch om de waterstanden in deze gebieden te kunnen berekenen, is de methode ontstaan.

Het betreffende gebied wordt omsloten door de volgende kanalen:

Fig. 28. Berekening van den waterspiegel in een duinterrein omgeven door kanalen. boven de punt: A + B ϕ . links: de waterstand rechts: de niet vereffende correctie.

hot Van der Vlietkanaal	met een peil van	1.10 + A.P.,	1)
" Sprenkelkanaal	" " " "	0.55 + " ,	
" Noord Ooster kanaal	" " " "	0.10 + " .	

Gedurende eenige jaren zijn de genoemde peilen ongeveer constant geweest, zoodat men mag aannemen met een stationnairen toestand te doen te hebben.

Op fig. 28 is het gebied voorgesteld, waarbij er tevens een net overheen getoekend is met maaswijdte $a = 173$ m (dit is $100\sqrt{3}$). De afstand tusschen de evenwijdige lijnen, die het net vormen is 150 m). De bovenkant van de scheidende laag ligt op 13 m - A.P. De randen, die hierboven liggen, zijn echter niet alle even doorlatend. Met name zijn de onderste lagen minder doorlatend dan de hooger gelegene. Men rekent voor $kD = 100$ m²/dag, als het phreatisch oppervlak op A.P. ligt en 12 m²/dag meer voor iederen m, dien het hooger ligt. Hier is vooraf een schatting gemaakt voor de gemiddelde ligging van het phreatische vlak, waarvoor 0.75 + A.P. is gesteld. Daarmee komt overeen $kD = 109$ m²/dag. De nuttige neerslag is gesteld op 380 mm/jaar = 0,00104 m/dag, gelijkmatig over het jaar verdeeld. Voor de scheidende laag is een weerstand aangenomen van 5000 etm. overeenkomende met $\frac{k_2}{s} = \frac{1}{5000}$. De potentialen aan de onderzijde van deze laag zijn uit metingen bekend; de uitkomsten zijn in de figuur aangegeven in den vorm van lijnen van gelijke stijghoogte ψ (dikke lijnen).

In de differentiaalvergelijking

$$p_M = \frac{\sum p_n + A + B\psi_M}{C}$$

kunnen de grootheden A, B, en C als volgt berekend worden:

$$A = \frac{3 a^2 N}{2 kD} = \frac{3}{2} \frac{(100\sqrt{3})^2 \times 0,00104}{109} = 0,43 ,$$

$$B = \frac{1}{6} \frac{k_2 a^2}{s kD} = \frac{1}{6} \frac{1}{5000} \frac{(100\sqrt{3})^2}{109} = 0,0824 ,$$

$$C = b + B = 6,08 ,$$

zoodat

$$p_M = \frac{\sum p_n + 0,43 + 0,0824 \psi_M}{6,08} .$$

Hierin zijn de grootheden uitgedrukt in meters en dagen; in fig. 28 zijn echter alle grootheden in cm aangegeven. Het heeft geen zin den gang van de berekening op de figuur aan te geven. De gebruikte rekencijfers zijn afhankelijk van volstrekt willekeurig aangenomen beginwaarden voor de potentiaal, verder van de volgorde, waarin de punten behandeld worden en van de correcties, die aangebracht werden. Volstaan wordt daarom met het aangeven van:

de waarden van A + B boven de punten,

de berekende stijghoogten p van het water links van de punten

(zie ook de (dunne) lijnen van gelijke stijghoogte)

en de niet-vereffende correcties, rechts van de punten.

Hiermee is dus tevens verantwoording afgelegd van de nauwkeurigheid. De waarde van den nuttigen neerslag is n.l. zeker niet binnen 5% nauwkeurig, zoodat de onvereffende correctie $\frac{0,25 \times 0,43}{6,08} = 0,0035$ m = 0,35 cm mag bedragen. Hieraan is ruimschoots voldaan.

1) In het gebied van de Amsterdamsche waterleiding behoeft geen verschil te worden gemaakt tusschen A.P. en N.A.P.

In het algemeen is het wenschelijk, niet meer nullen achter de komma van een getal te schrijven dan noodig is in verband met de nauwkeurigheid van het getal. Wetenschappelijk gesproken, zou het dus juister zijn te schrijven 1,1 m + A.P. In verband met het spraakgebruik, waarbij wordt gezegd één meter tien, zal hier en bij andere lengtomaten in den regel de nul op de plaats van de centimeters geschreven worden, ook als de nauwkeurigheid niet verder dan tot decimeters reikt.

par. 29. Toepassing 2. Berekening van de drukverhoging onder de scheidende laag en van de vervormingen van den zoutwaterzak tengevolge van het verhoogen van de bovenduinstanden in de prise diep van de Amsterdamsche waterleiding.

In het meergenoemde Rapport 1940 van de Gemeentewaterleidingen wordt een bedrijfsvoering in de duinen beschreven, die in twee belangrijke punten van de bestaande verschilt. In de eerste plaats zullen de puttenbemalingen in normale tijden buiten bedrijf komen, en in de tweede plaats zullen de bovenduinstanden (d.i. boven de scheidende laag) door middel van irrigatie verhoogd worden. In het hieronderstaande zullen berekend worden de potentialen onder de scheidende laag en de verplaatsingen van het scheidingsvlak tusschen zoet en zout water in den nieuwen toestand.

Het hydrologische profiel wordt als volgt geschematiseerd:

160 m - A.P.: volkomen ondoordringbare basis

Van 160 m - A.P. tot 20 m - A.P. goed doorlatende, pleistocene zanden, waarvoor $k = 17$ m/dag. Hierin bevindt zich het scheidingsvlak tusschen zoet en zout water. Onder het strand ligt dit op ca. 60 m - A.P., aan de landzijde van het beschouwde gebied op 126 m - A.P. De ligging van het grensvlak in m - A.P. is aangegeven in fig. 36 (de cijfers links van de punten).

Van 20 m - A.P. tot 13 m - A.P. een scheidende laag, waarvoor $\frac{k_s}{b} = \frac{1}{5000}$.

Boven 13 m - A.P. goed doorlatend bovenduinzand.

Als uitgangspunt van de berekening dienen uitvoerige metingen, verricht met de talloze peilfilters, die in het terrein aanwezig zijn.

De eerstgenoemde verandering in de bedrijfsvoering: het stopzetten van alle puttenbemalingen, is in het bedrijf te verwozenlijken. De verandering is zoo ruw, dat men eenige dagen moet wachten, voor de nieuwe potentialen onder de scheidende laag zich hebben ingesteld. Het bedrijf laat dit echter toe. De metingen, verricht tijdens deze z.g. stilstandsproef, zijn vermeld op fig. 29 voor wat betreft de bovenduinstanden en op fig. 31 voor wat betreft de potentialen onder de scheidende laag. De laatste zijn alle gemeten in het zoete water. Het doel van de berekening is, het vinden van den invloed van de tweede verandering in de bedrijfsvoering, n.l. het verhoogen van de bovenduinstanden. In fig. 30 is het kanalenmet getoekend, zooals dit in de toekomst zal worden: de ring van randkanalen zal worden gesloten, en enkele kanaalgedeeltes, die nu droog staan, zullen weer met water gevuld worden. Het peil van de middenkanalen is in de berekening op 6 m + A.P. gesteld, dat van de randkanalen op 2 m + A.P. Tusschen de kanalen in zijn in fig. 30 eenige peilen ingeschreven. Deze zijn geschat. De terreinen tusschen de middenkanalen zullen ongeveer een horizontalen grondwaterspiegel op 6 m + A.P. hebben. Schat men n.l. de toekomstige potentiaal onder de scheidende laag ter plaatse op ca 0,80 + A.P. dan bedraagt het drukverschil ter weerszijden van deze laag 5.20 m, dat is juist voldoende om den heelen nuttigen neerslag, groot 0.38 m/jaar te doen infiltreren. In het bovenduinwater heeft dan geen horizontale afstroming plaats, zoodat de grondwaterspiegel een horizontaal vlak zal vormen. In de velden buiten de middenkanalen zal de infiltratie kleiner zijn dan de nuttige neerslag, zoodat daar een bolle vorm van de waterspiegel verondersteld moet worden. Aan de oostzijde van het gebied is een punt-streeplijn getrokken. Hier buiten bevindt zich polderland, of gebieden, waarvan men op andere wijze de grondwaterstand kan regelen. Men mag dus aannemen, dat daar de bovenwaterstanden niet veranderen.

Over het gebied is een puntenet gelegd. Fig. 32 geeft de aaneenschakeling van zeshoekjes, overeenkomende met het gearceerde zeshoekje van fig. 15. De maaswijdte van het net is $a = 1154 \text{ m} = \frac{2000}{\sqrt{3}}$.

Fig. 32 is op transparantpapier getoekend en gelegd op fig. 29. Voor ieder zeshoekje is de gemiddelde waarde van p bepaald. Deze is aangegeven (in meters) rechts van de punten van het net. Daarna is fig. 32 op fig. 30 gelegd, en is eveneens de gemiddelde waarde van p bepaald. Deze is links van de punten van het net aangegeven. Tenslotte staan onder de punten de verschillen tusschen de genoemde waarden, d.i. de bedragen, waarmee de bovenwaterstand verhoogd wordt.

Met behulp van de methode van de veelvuldige superpositie zijn de veranderingen in de zoutwaterpotentiaal φ en daarmee tevens die van de zoutwaterpoten-

tiaal ψ berekend in de punten langs den rand van fig. 34. Hierbij is gebruik gemaakt van fig. 33, waarvan de beteekenis al is omschreven in par. 24. De figuur geldt voor 1 m drukverhooging in het gearceerde zeshoekje, de waarden voor ψ van de figuur mochten met 0.59 worden vermenigvuldigd, om mm te krijgen. 1)

Binnen den rand van fig. 34 zijn de veranderingen van ψ berekend met de veroffeningsmethode. De differentiaalvergelijking luidt:

$$\psi_M = \frac{\sum \psi_A + A p_M}{B} = \frac{\sum \psi_A + 0,167 p}{6,17}$$

Op de gebruikelijke wijze zijn aangegeven:

boven de punten: p_M , links van de punten: de berekende verhooging van de potentiaal ψ , en rechts van de punten: de niet-veroeffende eindcorrecties, alles in mm.

De waarden van p zijn zeker niet nauwkeurig binnen 10 cm, zoodat volstaan kan worden met een eindcorrectie kleiner dan

$$\frac{0,167 \times 0,10}{6,17} = 0,0027 \text{ m} = 2,7 \text{ mm.}$$

Op fig. 35 zijn bij de punten bijgeschreven,

links boven: de waarde van ψ vóór de verandering, d.i. tijdens de stilstandsproef. Deze cijfers zijn ontleend aan fig. 31.

links onder: een correctie om den zeestand tijdens de stilstandsproef van 0,08 m + A.P. om te rekenen in een normalen, gemiddelden zeestand van 0,18 m - A.P. De zeestand tijdens de stilstandsproef is berekend als gemiddelde over 12 uur.

rechts boven: de verandering van ψ door de verhooging van de bovenduinstanden. De cijfers zijn ontleend aan fig. 34.

rechts onder: de totale waarde van ψ in den toekomstigen toestand, berekend door sommatie van de drie genoemde cijfers. Het verloop van deze grootheid is door lijnen van gelijken druk voorgesteld.

Tenslotte geeft fig. 36 links van de punten de diepteligging van het grensvlak tusschen zoet en zout water in meters onder A.P., en rechts van de punten de verplaatsingen hiervan in cm/jaar, berekend uit $\frac{dw}{dt}$ ten tijde van het invoeren van het nieuwe bedrijf, waarbij het + teeken een beweging naar beneden en het - teeken een beweging naar boven aangeeft. Voor het soortelijk gewicht van het zoute water is hierbij 1,02 aangenomen.

1) De straal van den buitensten cirkel is willekeurig op een gewenschte grootte geteekend. Daarna zijn de stralen van de andere cirkels berekend, zoodanig dat voor de bijgeschreven getallen de ronde cijfers 1, 2, 3 10 konden worden genomen. Uit deze werkwijze vloeit de coëfficiënt 0.59 voort. Bij het reproduceeren is om technische redenen de schaal van deze figuur een andere geworden dan die van de overige figuren.

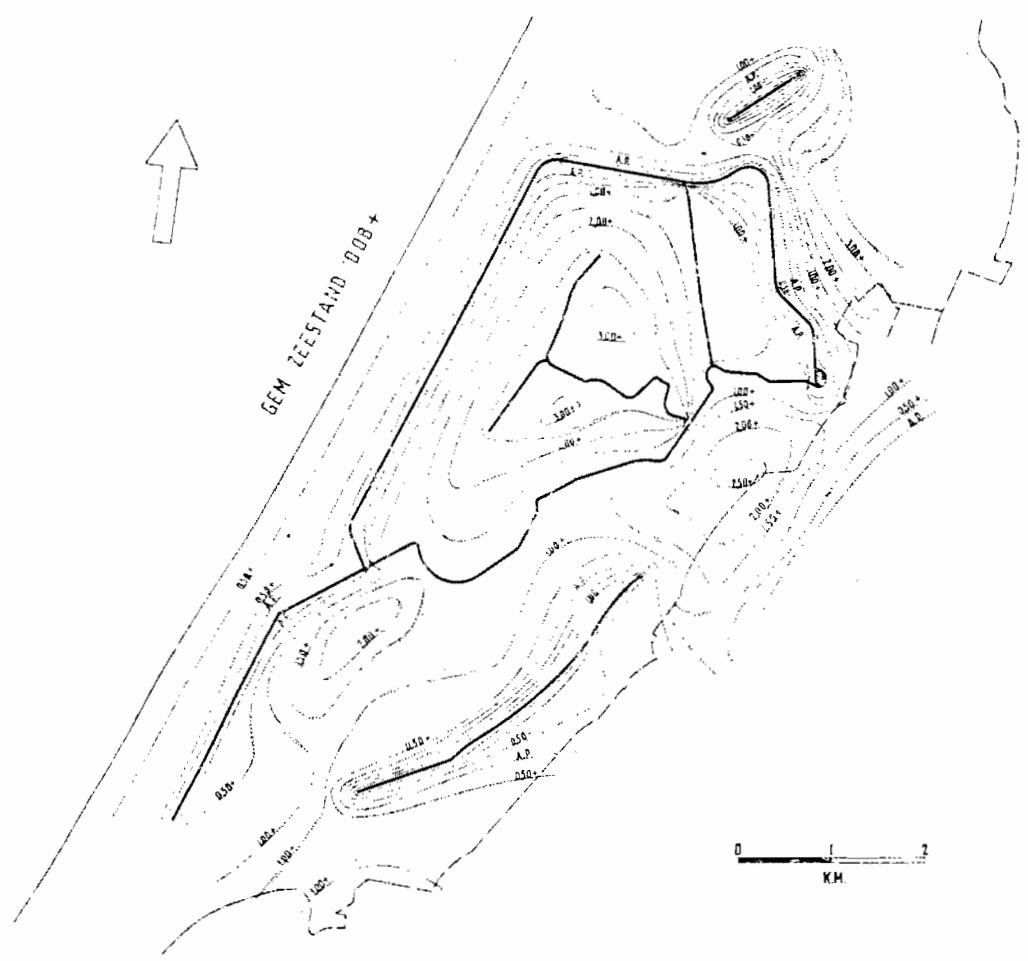


Fig. 29. Aanvankelijke bovenwaterstanden.

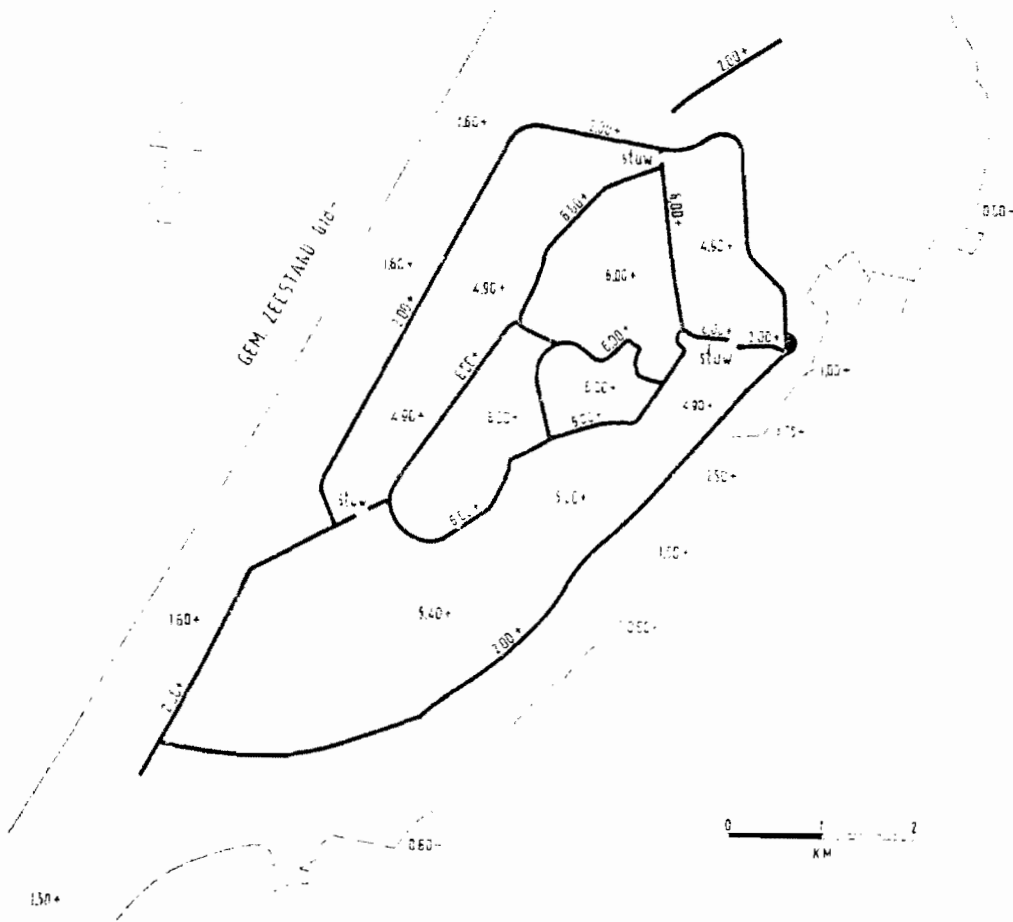


Fig. 50. Bovenwaterstanden bij bevoeiing.

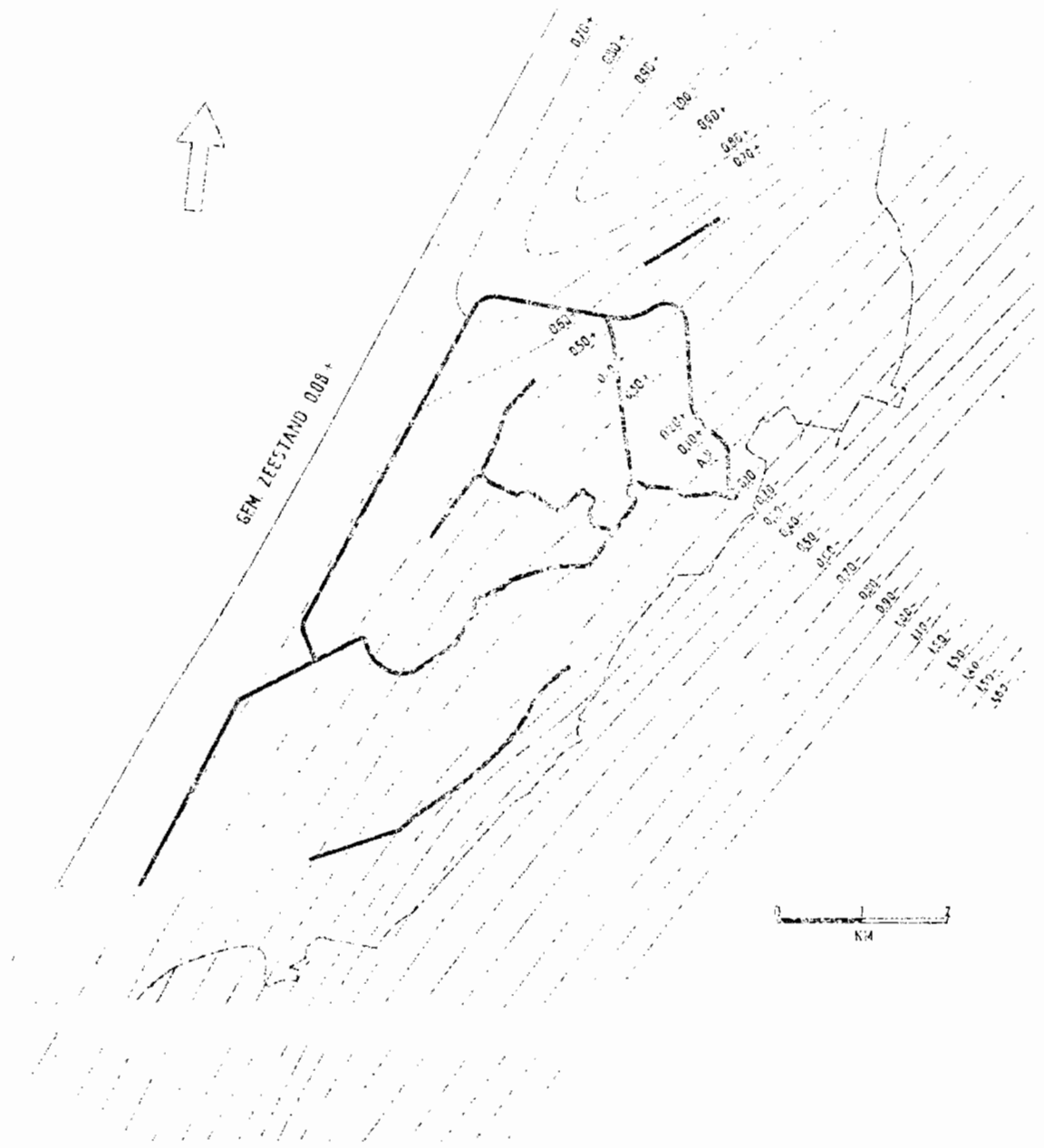


Fig. 31. Aanvankelijke zoutwaterpotentialen van het diepe water.

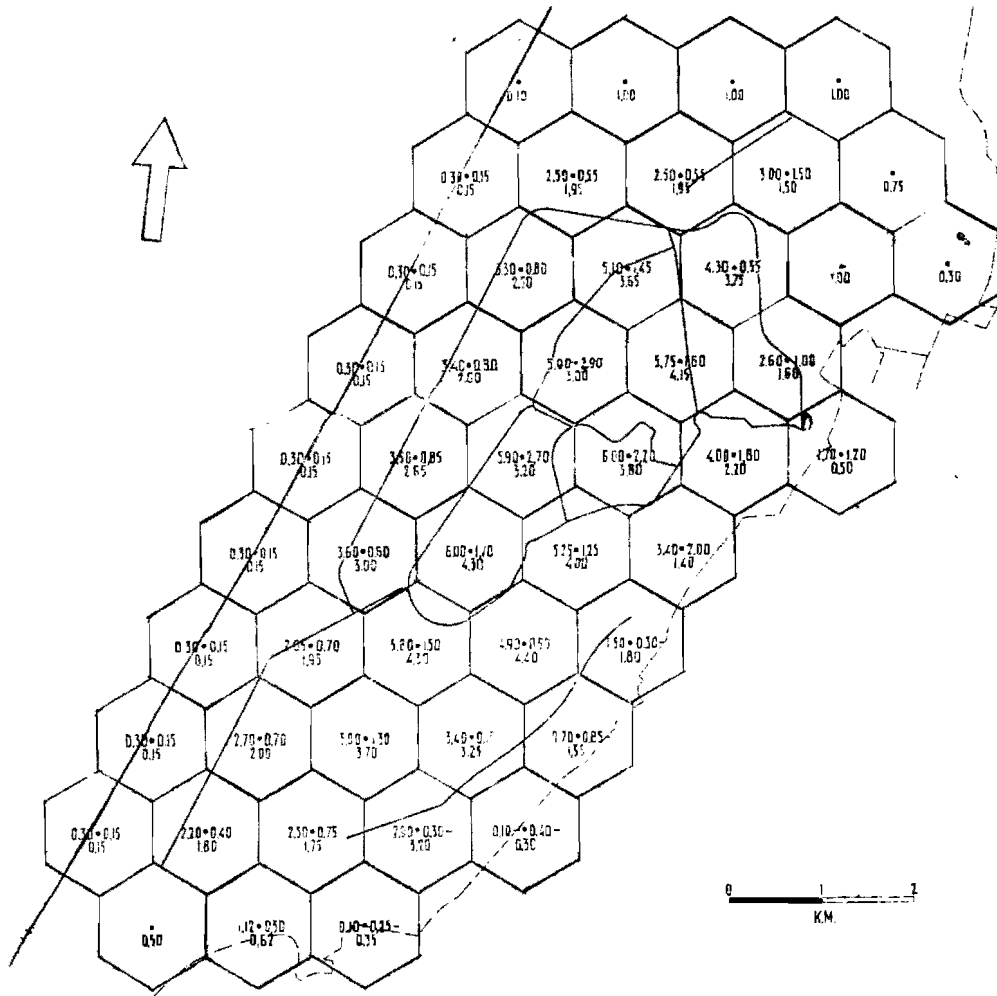


Fig. 32. Zeshoekennet.

rechts van de punt: bovenwaterstand eerst

links " " " : " " " later

onder de punt : verandering in bovenwaterstand.

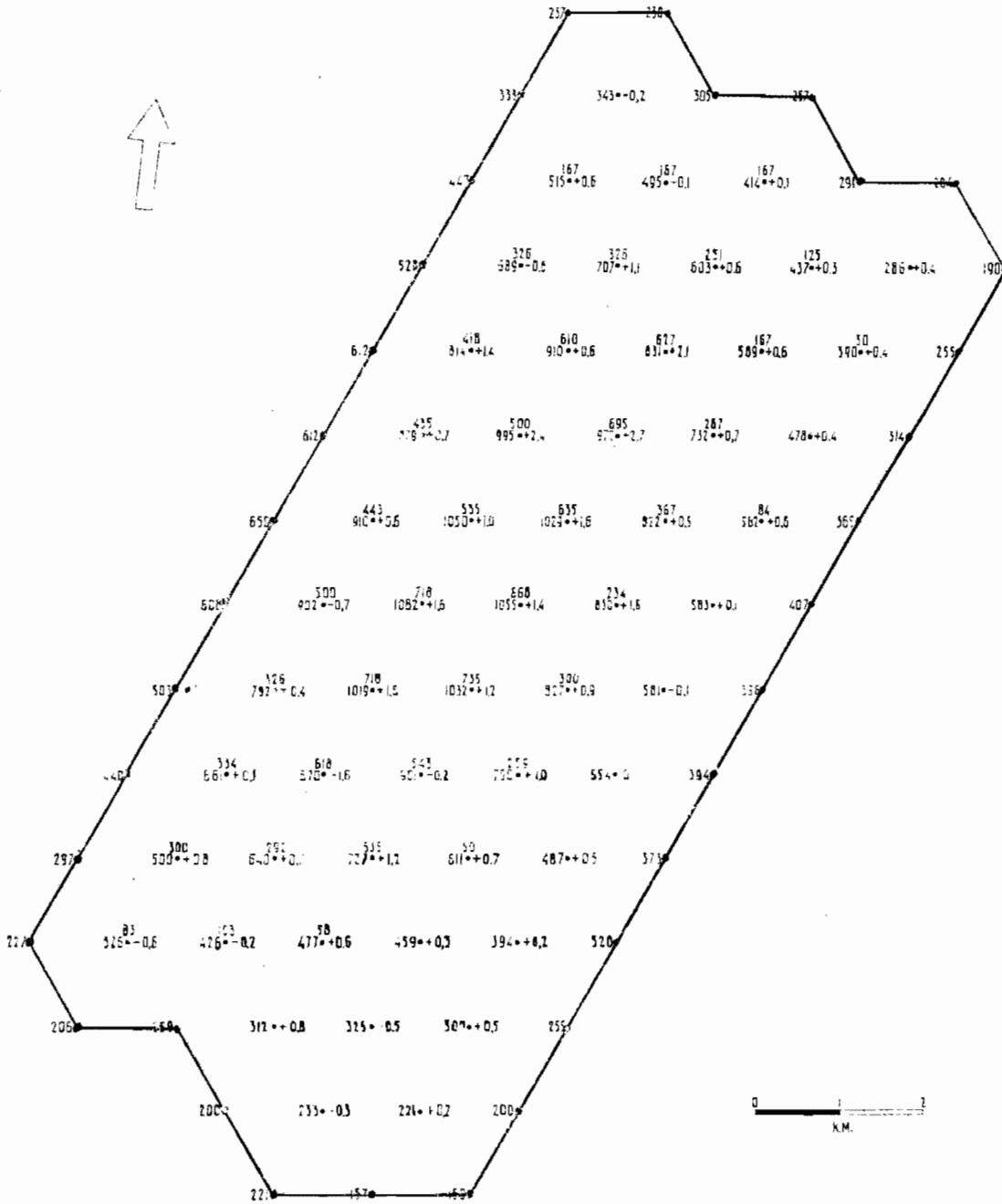


Fig. 34. De vereffening.
boven de punt p_{21}

Links : de toename van φ

Rechts: de niet vereffende correctie.

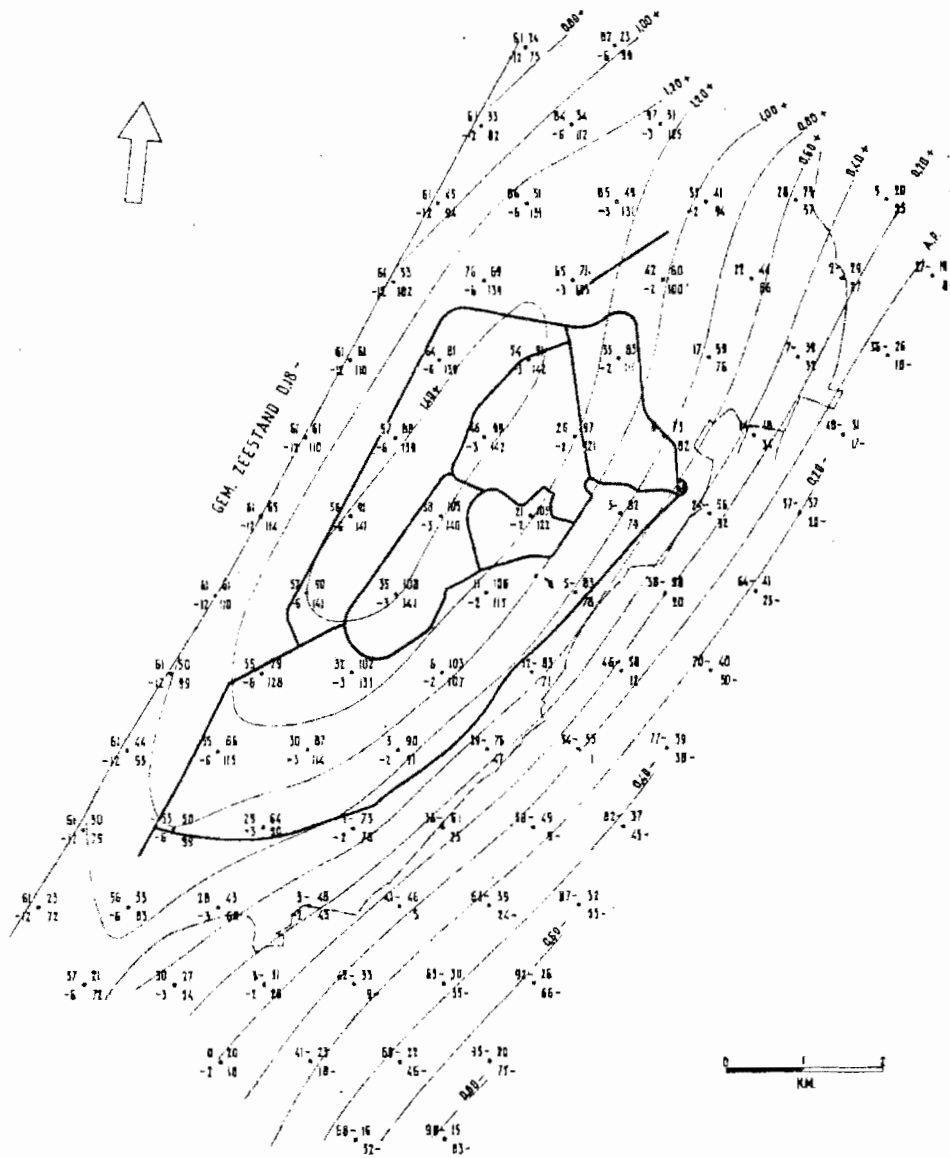


Fig. 35. Superpositie van de verandering op den aanvankelijken toestand, links boven de punt: aanvankelijke potentiaal, links onder : correctie als gevolg van den niet normalen zeestand tijdens de meting, rechts boven: de verandering van ϕ rechts onder: de nieuwe potentiaal.

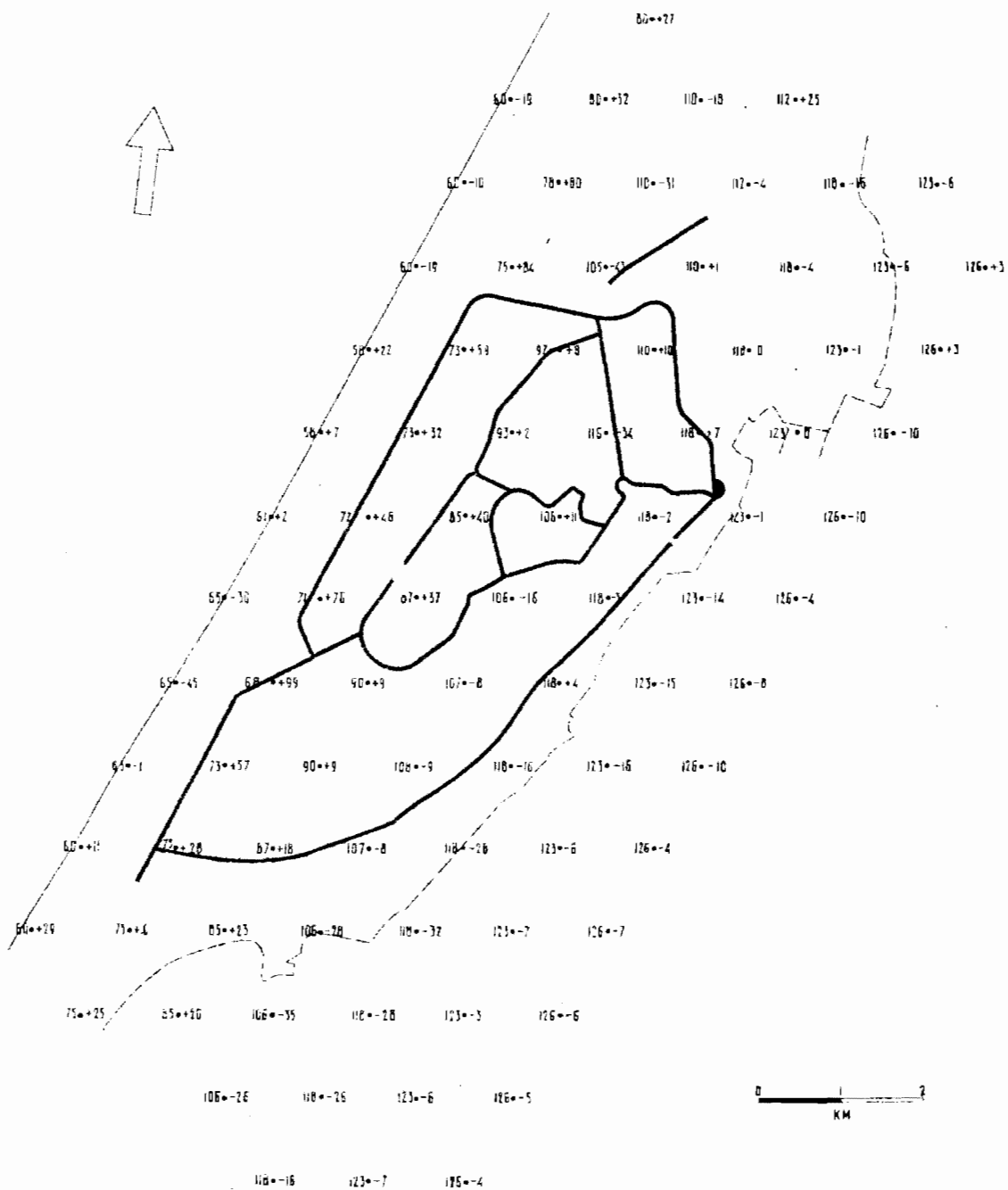


Fig. 36. Verplaatsingen van het grensvlak.
Links van de punt: ligging van het grensvlak in meters onder A.P.
Rechts: verplaatsing in cm per jaar.

u^2	$\int_m^u \frac{e^{-t}}{t} dt$	u^2	$\int_{\infty}^u \frac{e^{-t}}{t} dt$	u^2	$\int_{\infty}^u \frac{e^{-t}}{t} dt$
0,00	-	0,50	-0,5598	1,0	-0,2194
0,01	-4,0379	0,51	-0,5478	1,1	-0,1860
0,02	-3,3547	0,52	-0,5362	1,2	-0,1584
0,03	-2,9591	0,53	-0,5250	1,3	-0,1365
0,04	-2,6813	0,54	-0,5140	1,4	-0,1162
0,05	-2,4679	0,55	-0,5034	1,5	-0,1000
0,06	-2,2953	0,56	-0,4930	1,6	-0,08631
0,07	-2,1508	0,57	-0,4830	1,7	-0,07465
0,08	-2,0269	0,58	-0,4732	1,8	-0,06471
0,09	-1,9187	0,59	-0,4636	1,9	-0,05620
0,10	-1,8229	0,60	-0,4544	2,0	-0,04890
0,11	-1,7371	0,61	-0,4454	2,1	-0,04261
0,12	-1,6595	0,62	-0,4366	2,2	-0,03719
0,13	-1,5889	0,63	-0,4280	2,3	-0,03250
0,14	-1,5241	0,64	-0,4197	2,4	-0,02844
0,15	-1,4645	0,65	-0,4115	2,5	-0,02491
0,16	-1,4092	0,66	-0,4036	2,6	-0,02185
0,17	-1,3578	0,67	-0,3959	2,7	-0,01918
0,18	-1,3098	0,68	-0,3883	2,8	-0,01686
0,19	-1,2649	0,69	-0,3810	2,9	-0,01482
0,20	-1,2227	0,70	-0,3738	3,0	-0,01304
0,21	-1,1829	0,71	-0,3668	3,1	-0,01149
0,22	-1,1454	0,72	-0,3599	3,2	-0,01013
0,23	-1,1099	0,73	-0,3532	3,3	-0,008939
0,24	-1,0762	0,74	-0,3467	3,4	-0,007890
0,25	-1,0443	0,75	-0,3403	3,5	-0,006970
0,26	-1,0139	0,76	-0,3341	3,6	-0,006160
0,27	-0,9849	0,77	-0,3280	3,7	-0,005448
0,28	-0,9573	0,78	-0,3221	3,8	-0,004820
0,29	-0,9309	0,79	-0,3163	3,9	-0,004267
0,30	-0,9057	0,80	-0,3106	4,0	-0,003779
0,31	-0,8815	0,81	-0,3050	4,1	-0,003349
0,32	-0,8583	0,82	-0,2996	4,2	-0,002969
0,33	-0,8361	0,83	-0,2943	4,3	-0,002633
0,34	-0,8147	0,84	-0,2891	4,4	-0,002336
0,35	-0,7942	0,85	-0,2840	4,5	-0,002073
0,36	-0,7745	0,86	-0,2790	4,6	-0,001841
0,37	-0,7554	0,87	-0,2742	4,7	-0,001635
0,38	-0,7371	0,88	-0,2694	4,8	-0,001453
0,39	-0,7194	0,89	-0,2647	4,9	-0,001291
0,40	-0,7024	0,90	-0,2602	5,0	-0,001148
0,41	-0,6859	0,91	-0,2557	6	-0,00093601
0,42	-0,6700	0,92	-0,2513	7	-0,00071155
0,43	-0,6546	0,93	-0,2470	8	-0,00053767
0,44	-0,6397	0,94	-0,2429	9	-0,00041245
0,45	-0,6253	0,95	-0,2387	10	-0,0003157
0,46	-0,6114	0,96	-0,2347	11	-0,000231400
0,47	-0,5979	0,97	-0,2308	12	-0,000164751
0,48	-0,5848	0,98	-0,2269	13	-0,00011622
0,49	-0,5721	0,99	-0,2231	14	-0,000085566
		1,00	-0,2194	15	-0,000061918

u	$\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}$	f_0	f_1	f_2	f_3
0,-	0,5642	-1,-	1,1284	-1,-	0,7523
0,025	0,5639	-0,9717	1,0791	-0,9448	0,7037
0,050	0,5628	-0,9436	1,0312	-0,8920	0,6578
0,075	0,5611	-0,9155	0,9849	-0,8416	0,6145
0,100	0,5586	-0,8875	0,9397	-0,7935	0,5736
0,125	0,5555	-0,8596	0,8960	-0,7476	0,5350
0,150	0,5517	-0,8320	0,8537	-0,7039	0,4987
0,200	0,5421	-0,7773	0,7732	-0,6227	0,4324
0,250	0,5300	-0,7237	0,6982	-0,5497	0,3739
0,300	0,5157	-0,6714	0,6285	-0,4829	0,3224
0,350	0,4992	-0,6206	0,5639	-0,4232	0,2772
0,400	0,4808	-0,5716	0,5042	-0,3699	0,2375
0,450	0,4608	-0,5245	0,4495	-0,3222	0,2030
0,500	0,4394	-0,4795	0,3993	-0,2799	0,1729
0,550	0,4169	-0,4367	0,3534	-0,2423	0,1468
0,600	0,3936	-0,3961	0,3119	-0,2090	0,1243
0,650	0,3698	-0,3580	0,2741	-0,1798	0,1048
0,700	0,3457	-0,3222	0,2402	-0,1540	0,0883
0,750	0,3215	-0,2888	0,2097	-0,1315	0,0740
0,800	0,2975	-0,2579	0,1824	-0,1120	0,0618
0,850	0,2735	-0,2293	0,1581	-0,0949	0,0516
0,900	0,2510	-0,2031	0,1364	-0,0803	0,0428
0,950	0,2288	-0,1791	0,1173	-0,0677	0,0354
1,-	0,2076	-0,1573	0,1005	-0,0568	0,0291
1,050	0,1874	-0,1376	0,0857	-0,0476	0,0239
1,100	0,1683	-0,1198	0,0729	-0,0396	0,0196
1,150	0,1504	-0,1039	0,0617	-0,0329	0,0159
1,200	0,1337	-0,0897	0,0520	-0,0273	0,0129
1,250	0,1183	-0,0771	0,0438	-0,0224	0,0105
1,300	0,1041	-0,0660	0,0366	-0,0184	0,0084
1,350	0,0912	-0,0562	0,0307	-0,0148	0,0071
1,400	0,0795	-0,0477	0,0253	-0,0122	0,0055
1,450	0,0689	-0,0403	0,0209	-0,0100	0,0043
1,500	0,0595	-0,0339	0,0172	-0,0081	0,0034
1,600	0,0436	-0,0237	0,0114	-0,0055	0,0017
1,700	0,0314	-0,0162	0,0076	-0,0032	0,0014
1,800	0,0221	-0,0109	0,0050	-0,0020	0,0009
1,900	0,0153	-0,0072	0,0031	-0,0012	0,0005
2,-	0,0104	-0,0047	0,0020	-0,0007	0,0004
2,100	0,0069	-0,0030	0,0012	-0,0005	0,0001
2,200	0,0045	-0,0019	0,0007	-0,0003	
2,300	0,0029	-0,0011	0,0005	-0,0001	
2,400	0,0018	-0,0007	0,0003		
2,500	0,0011	-0,0004	0,0002		

Storende drukfouten

- Blz. 4. 3 regels boven verg. (2): Dimensie [l] .
- Blz. 6. verg. (13): $f'' + 2u f' - 2n f = 0$
- Blz. 7. verg. (7'): $q = -\frac{\varphi_0}{t\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2}$
- Blz. 8. regel 3 van boven: $\int_0^t q dt = -\frac{2\varphi_0}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$
- Blz. 9. regel 3 van onderen: $y' = c_1 \frac{e^{-u^2}}{(2u^2+1)^2}$
- Blz. 11. onderste regel: $q = -\beta t \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} - (2u^2+1) \{1 - E(u)\} \right]$
- Blz. 12. regel 4 van boven: $\varphi = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \beta t^{\frac{3}{2}}$
- Blz. 13. 3^e en 4^e regel onder verg. (11'): een waarde van n, die.....
- Blz. 19. 4^e regel onder verg. (9): $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4} t^{\frac{n}{2}} - ' f''$
- Blz. 20. 4^e regel onder verg. (17): achter in dit werk.
- Blz. 24. regel 9 van boven: de beweging reeds in het eerste jaar nage-
noeg op den evenwichtsstand.
- Blz. 24. 2^e regel van onderen: $x = 200$ en $x = 400$ m
- Blz. 31. 5^e regel van boven: $x = \infty$; $1 = t^{2n} f(\infty)$
- Blz. 31. 6^e regel van boven: $t = 0$; $1 = 0^{2n} f(\infty)$
- Blz. 36. 8^e regel van boven: $D + \varphi = \sqrt{\dots}$
- Blz. 50. 4^e regel van onderen: en daarbuiten = 0 zijn
- Blz. 63. 9^e regel van boven: De zanden, die hierboven liggen.
- Blz. 63. 8^e regel van onderen (de noot niet meegerkend): de waarde van
 $A + B\varphi$ boven de punten.
- Blz. 72. Onderschrift bij de figuur: Invloed van een elementaire veran-
dering in den bovenwaterstand.

Stellingen

behoorende bij het proefschrift

"Over de berekening van grondwaterstromingen".

J.H. Edelman.

1. De bemoeiing van den Staat met de drinkwatervoorziening behoort niet onder het Departement van Sociale Zaken, maar onder dat van Openbare Werken te ressorteeren.
2. De hydrologische gesteldheid van de duinen is langs de Nederlandsche kust zóó verschillend, dat het niet mogelijk is beschouwingen te leveren aan de hand van een schema, dat een gemiddelden toestand weergeeft.
3. De droogmaking van de Haarlemmermeer omstreeks 1850 doet nu nog zijn invloed gelden op het scheidingsvlak van zoet en zout grondwater onder de belendende duinen; wanneer geen andere factoren de beweging beïnvloedden, zou een daling van dit vlak er het gevolg van zijn.
4. Wanneer zich zout grondwater boven zoet grondwater bevindt, kan het grensvlak wel in evenwicht zijn, maar dit evenwicht is altijd labiel.
5. Bij het onderwijs in de wiskunde behoort het bijbrengen van de diverse begrippen in de eerste plaats te komen; het geven van bewijzen, die weinig tot het vormen van begrippen bijdragen, in de tweede plaats.
6. Het heeft geen zin een transportleiding voor water, met het oog op ontluchting, een kleine helling te geven.
7. Het verdient aanbeveling lysimeterwaarnemingen tenminste in duplo uit te voeren.
8. Vloeren van langzame zandfilters moeten zoo dun worden geconstrueerd, als uit praktische overwegingen mogelijk is.

9. De algemeene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$f'' - 2x f' - 2nf = 0$$

kan worden verkregen uit de oplossing van de vergelijking

$$f'' + 2uf' - 2nf = 0$$

door $u = \frac{x}{l}$ te stellen; in de oplossing treden de polynomen van Hermite ¹⁾ voor den dag als

$$H_n(x) = n! l^n q_n\left(\frac{x}{l}\right).$$

(zie § 7 van dit proefschrift).

10. Het is uitgesloten dat de verzoutingsverschijnselen bij de bronnen in de duinwaterwinplaats van Amsterdam veroorzaakt worden door toetreding van zout water tot de filters; slechts het brakke water uit de diffusiezone stroomt in de bron uit.

¹⁾ Courant und Hilbert - Methoden der mathematischen Physik - Berlin 1924
1. Band blz. 76.